Přijímací řízení pro 2023/24 matematika
Přírodovědecká fakulta
Ostravská univerzita
Navazující magisterské studium – Studijní program Učitelství pro SŠ – Matematika
9. června 2023

Příklad 1. Mějme funkci

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x}\,.$$

Určete

- definiční obor dané funkce,
- paritu funkce (zda je funkce sudá/lichá/ani sudá ani lichá),
- intervaly, na kterých je daná funkce rostoucí.

(25 bodů)

Řešení:

- Definičním oborem funkce f je

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- Definiční obor funkce je souměrný kolem 0,

$$\forall x \in D(f) : f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{2(-x)} = -\frac{x^2+1}{2x} = -f(x)\,.$$

  Funkce f je lichá.

- Funkce je rostoucí na intervalech, na nichž je první derivace funkce kladná.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+1}{2x}\right)' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}$$

  $f'(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, -1)$ a $x \in (-1, \infty)$. Na těchto intervalech je daná funkce rovněž rostoucí. //

Příklad 2. V závislosti na koeficientu a rozhodněte o počtu řešení soustavy lineárních rovnic. Všechna řešení zapište.

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ x + y + 2z &= 3 \\ -y + az &= 3 \end{aligned}$$

(25 bodů)

Řešení: Můžeme zapsat rozšířenou matici soustavy, tu pak převést na trojúhelníkový (schodovitý) tvar pomocí elementárních řádkových úprav:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & a & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & a & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 \end{array}\right)$$

Soustava má řešení, pokud se hodnosti matice soustavy a rozšířené matice soustavy shodují.
V případě, že $a = 1$ je hodnost matice soustavy rovna 2, hodnost rozšířené matice soustavy je rovna 3. Soustava v tomto případě nemá řešení.
V případě, že $a \neq 1$ jsou hodnosti matice soustavy a rozšířené matice soustavy rovny 3, soustava bude mít jedno řešení:

$$(x, y, z)^T = \left(\frac{5a-8}{a-1}, \frac{-2a+3}{a-1}, \frac{1}{a-1}\right)^T \qquad //$$

Příklad 3. Mějme matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete determinant matice A, rozhodněte, zda je matice A regulární. Pokud k matici A existuje matice inverzní, nalezněte ji. **(25 bodů)**

Řešení: Například s pomocí Laplaceova rozvoje podle prvního řádku vypočítáme determinant matice A.

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2(-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Determinant matice A je nenulový, tedy je tato matice regulární a existuje k ní matice inverzní, kterou nalezneme například následujícím způsobem.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Inverzní matice $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & -1 \\ -1/2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. //

Příklad 4. Uvažujme množinu zbytkových tříd modulo 3,

$$\mathbb{Z}_3 = \{[0]_{\equiv_3}, [1]_{\equiv_3}, [2]_{\equiv_3}\}$$

a na ní operace sčítání a násobení modulo 3 (označme je $+$ a $\cdot$). Rozhodněte, jakou algebraickou strukturu tvoří $(\mathbb{Z}_3, +)$ a $(\mathbb{Z}_3, \cdot)$ a k oběma strukturám sestavte Cayleyho tabulku.
Jakou algebraickou strukturu tvoří $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$? **(25 bodů)**

Řešení: Struktura $(\mathbb{Z}_3, +)$ je Abelovská (komutativní) grupa. Struktura $(\mathbb{Z}_3, \cdot)$ je monoid. (K 0 neexistuje inverze, proto se nejedná o grupu.)
Cayleyho tabulky:

$+$	$[0]_{\equiv_3}$	$[1]_{\equiv_3}$	$[2]_{\equiv_3}$
$[0]_{\equiv_3}$	$[0]_{\equiv_3}$	$[1]_{\equiv_3}$	$[2]_{\equiv_3}$
$[1]_{\equiv_3}$	$[1]_{\equiv_3}$	$[2]_{\equiv_3}$	$[0]_{\equiv_3}$
$[2]_{\equiv_3}$	$[2]_{\equiv_3}$	$[0]_{\equiv_3}$	$[1]_{\equiv_3}$

$\cdot$	$[0]_{\equiv_3}$	$[1]_{\equiv_3}$	$[2]_{\equiv_3}$
$[0]_{\equiv_3}$	$[0]_{\equiv_3}$	$[0]_{\equiv_3}$	$[0]_{\equiv_3}$
$[1]_{\equiv_3}$	$[0]_{\equiv_3}$	$[1]_{\equiv_3}$	$[2]_{\equiv_3}$
$[2]_{\equiv_3}$	$[0]_{\equiv_3}$	$[2]_{\equiv_3}$	$[1]_{\equiv_3}$

$(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ je komutativní těleso. //