Přijímací řízení 2019/20 matematika
Přírodovědecká fakulta
Ostravská univerzita
Navazující magisterské studium - Studijní program Matematika
Specializace Matematika/Fuzzy matematika
12. srpna 2019

Příklad 1 Vyšetřete průběh reálné funkce jedné reálné proměnné:

$$f(x) = \frac{6(x-2)}{x^2},$$

tj. určete definiční obor, obor hodnot, paritu funkce, najděte průsečíky funkce s osou x a y, určete extrémy funkce (určete o jaký extrém se jedná – minimum/maximum) a intervaly, na kterých je funkce rostoucí/klesající. Určete intervaly, kde je funkce konvexní/konkávní. Načrtněte graf funkce.
(30 bodů)

Řešení 1

1. Určíme definiční obor $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a průsečíky s osami: $y = 0 \Leftrightarrow 6(x-2) = 0$ a tedy $x = 2$. Průsečík s osou y není, neboť $x \neq 0$.

2. Parita funkce:
$$f(-x) = \frac{-6(x+2)}{x^2} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$$
a tedy funkce není ani sudá ani lichá

3. Spočítáme první derivaci
$$f'(x) = \frac{24-6x}{x^3}$$
a určíme její definiční obor $D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

4. Pro extrém musí platit, že $f'(x) = 0$ a tedy
$$\frac{24-6x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 24 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 4\,.$$
Tudíž funkce $f(x)$ v bodě $x = 4$ může nabývat extrém.

5. Ověříme, zda se jedná o extrém a určíme typ extrému. Pomocí znaménka první derivace na okolí bodu $x = 4$, např. tabulkou

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$\mathrm{sgn}(f'(x))$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

První derivace mění na okolí bodu $x = 4$ znaménko a tedy funkce $f(x)$ má v tomto bodě extrém.

Z tabulky vidíme, že funkce je rostoucí pro $x \in (0, 4)$ a klesající pro $x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$.

A protože v levém okolí bodu $x = 4$ je derivace kladná a v pravém okolí bodu $x = 4$ je derivace záporná, má funkce v tomto bodě lokální maximum.

6. Spočítáme druhou derivaci
$$f''(x) = \frac{12x-72}{x^4}$$
a určíme její definiční obor $D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

7. Pro inflexní bod musí platit, že $f''(x) = 0$ a tedy
$$\frac{12x-72}{x^4} = 0 \Leftrightarrow 12x - 72 = 0 \Leftrightarrow x = 6\,.$$
Tudíž funkce $f(x)$ v bodě $x = 6$ může mít inflexní bod.

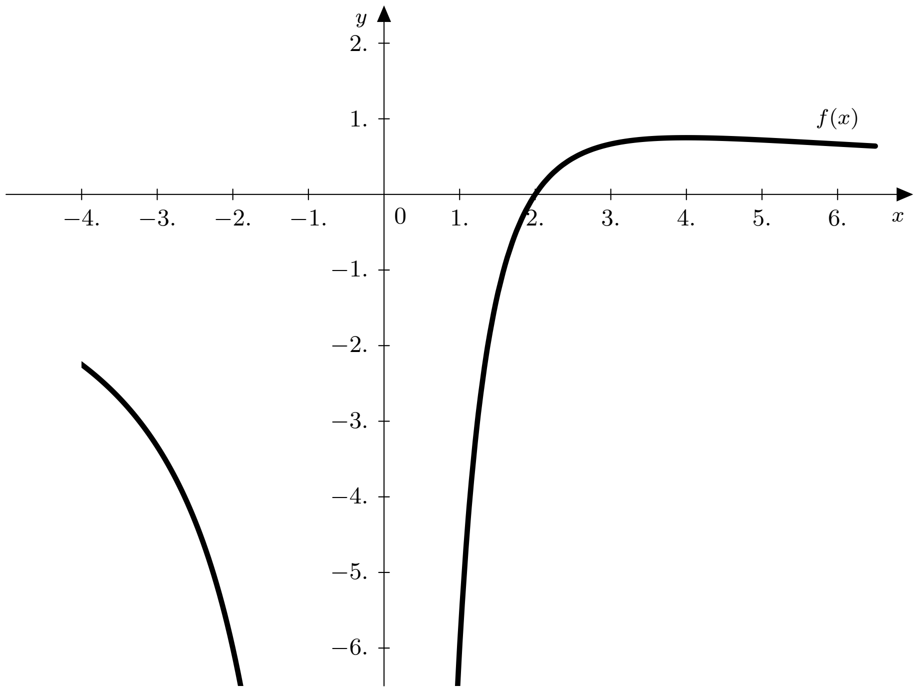
8. Ověříme, zda se jedná o inflexní bod. Pomocí znaménka druhé derivace na okolí bodu $x = 6$, např. tabulkou

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 6)$	$(6, \infty)$
$\mathrm{sgn}(f''(x))$	$-$	$-$	$+$

Druhá derivace mění na okolí bodu $x = 6$ znaménko a tedy funkce $f(x)$ má v tomto bodě inflexi.

Z tabulky vidíme že funkce $f(x)$ je konkávní pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 6)$ a konvexní pro $x \in (6, \infty)$.

9. Obor hodnot je $H(f) = (-\infty, \frac{3}{4})$. Graf



Příklad 2 Řešte soustavu nehomogenních lineárních algebraických rovnic s ohledem na různé hodnoty parametru p.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + px_2 &= 9 \\ x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

(25 bodů)

Řešení 2 Soustavu můžeme řešit pomocí matice

$$(A|\bar{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & p & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & p-1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & p-1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & p-2 & p+2 \end{array}\right)$$

Diskuze vzhledem k parametru p:

$p = 2$: Potom $h(A) = 2$ a $h(A|\bar{b}) = 3$. A tedy soustava nemá řešení.

$p \neq 2$: Potom $h(A) = 3$ a $h(A|\bar{b}) = 3$. Tedy $x_3 = \dfrac{p+2}{p-2}$, $x_2 = \dfrac{4}{p-2}$ a $x_1 = \dfrac{5p-18}{p-2}$. Tedy existuje právě jedno řešení

$$\left(\frac{5p-18}{p-2}, \frac{4}{p-2}, \frac{p+2}{p-2}\right)^{\mathrm{T}}$$

Příklad 3 Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = x^3 + 3.$$

Poté nalezněte partikulární řešení splňující podmínku $y(2) = 11$.
(20 bodů)

Řešení 3 Obecné řešení:

$$\begin{aligned}
y' &= x^3 + 3 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x^3 + 3 \\
\mathrm{d}y &= (x^3 + 3)\mathrm{d}x \\
y &= \int (x^3 + 3)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Obecné řešení dané diferenciální rovnice je

$$y = \frac{x^4}{4} + 3x + C, \qquad C \in \mathbb{R}\,.$$

Partikulární řešení:

$$\begin{aligned}
y(2) &= 11 \\
y(2) &= \frac{2^4}{4} + 3 \cdot 2 + C = 11 \\
\frac{16}{4} + 6 + C &= 11 \\
4 + 6 + C &= 11 \\
C &= 1
\end{aligned}$$

Partikulární řešení vyhovující podmínce $y(2) = 11$ je

$$y = \frac{x^4}{4} + 3x + 1\,.$$

Příklad 4 Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$, tj. aritmetickém pětidimenzionálním prostoru, uvažujme lineární obal následující množiny vektorů

$$\{(0,-1,0,2,1),\ (2,2,2,2,2),\ (4,3,4,6,5),\ (-1,0,1,1,0),(-2,-1,2,4,1)\}.$$

Rozhodněte, zda se jedná o podprostor, nebo ne. V případě, že ano, napište bázi a dimenzi tohoto podprostoru. Rozhodněte, zda vektor $(0,0,0,0,0)$ do něj náleží a napište ho jako lineární kombinaci bázových vektorů.
(25 bodů)

Řešení 4

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 6 & 5 \\ -2 & -1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 8 & 10 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lineární obal uvedené množiny vektorů je podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$, tento podprostor má dimenzi 3.
Bázi tohoto podprostoru tvoří například množina vektorů

$$\{(-1,0,1,1,0),(0,-1,0,2,1),(0,0,4,8,4)\}\,.$$

Ano, vektor $(0,0,0,0,0)$ do tohoto podprostoru patří (patří každému podprostoru vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$).

$$(0,0,0,0,0) = 0\cdot(-1,0,1,1,0) + 0\cdot(0,-1,0,2,1) + 0\cdot(0,0,4,8,4)\,.$$