Přijímací řízení 2018/19 matematika
Přírodovědecká fakulta
Ostravská univerzita
Navazující magisterské studium učitelské
8. června 2018

Příklad 1 S využitím derivací vyšetřete, na kterých intervalech je funkce

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

konvexní a na kterých je konkávní. Dále najděte extrémy této funkce.
(25 bodů)

Řešení 1

1. Určíme definiční obor, tedy $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$
2. Spočítáme první derivaci a její definiční obor
$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - (x^3 2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2},$$
a $D'_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.
3. Spočítáme druhou derivaci a její definiční obor
$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - (x^4 - 3x^2)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3},$$
a $D''_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.
4. Druhá derivace je nulová pouze pro $x = 0$. Konvexnost a konkávnost můžeme zjistit např. pomocí tabulky:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$\mathrm{sgn}(f''(x))$	$-$	$+$	$-$	$+$

Z tabulky vidíme že funkce $f(x)$ je konvexní pro $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$ a konkávní pro $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

5. Extrémy: určíme nulové body první derivace, tzn. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$ a protože $f''(\sqrt{3}) > 0$ dostáváme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x = \sqrt{3}$ lokální minimum, $f''(-\sqrt{3}) < 0$ dostáváme, že funkce $f(x)$ má v bodě $x = -\sqrt{3}$ lokální maximum. Pro $x = 0$ extrém nenastává.

Příklad 2 Na množině reálných čísel řešte soustavu homogenních lineárních algebraických rovnic a určete dimenzi a bázi prostoru řešení:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(25 bodů)

Řešení 2 Soustavu můžeme řešit maticově. Matice soustavy je

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Její determinant je $detA = 40 - 3 - 3 + 5 - 2 + 36 = 73 \neq 0$, tedy matice je regulární a existuje jediné řešení, kterým je nulový vektor $\overline{x} = (0, 0, 0)^T$. Dimenze prostrou řešení je 0.

Příklad 3 Najděte obecné řešení diferenciální rovnice 1.řádu

$$(x^2 - xy)y' + y^2 = 0.$$

Poté nalezněte partikulární řešení splňující počáteční podmínku $y(1) = -1$.
[Rovnici nejdříve rozřešte vzhledem k derivaci y' a potom použijte substituci $y/x = z$.]
(25 bodů)

Řešení 3 Diferenciální rovnici nejprve rozřešíme vzhledem k derivaci y'.

$$(x^2 - xy)y' = -y^2, \quad y' = -\frac{y^2}{(x^2 - xy)}, \; x^2 - xy \neq 0, \text{ tzn.} \quad y \neq x,$$

ve jmenovateli vytkneme x^2

$$y' = -\frac{y^2}{x^2(1 - \frac{y}{x})} = -\left(\frac{y}{x}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{y}{x}}.$$

Dostali jsme homogenní diferenciální rovnici $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$, kterou řešíme substitucí

$$\frac{y(x)}{x} = z(x), \qquad y(x) = x \cdot z(x), \qquad y'(x) = z(x) + x \cdot z'(x).$$

Rovnice přechází do tvaru

$$z + xz' = -\frac{z^2}{1-z} \qquad xz' = -\frac{z^2}{1-z} - z = \frac{-z^2 - z + z^2}{1-z} = \frac{-z}{1-z} = -\frac{z}{1-z},$$

ve které již můžeme separovat proměnné a následně integrovat

$$z' = -\frac{1}{x} \cdot \frac{z}{(1-z)} \qquad \frac{1-z}{z}\mathrm{d}z = -\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

Integrace levé strany

$$\int \frac{1-z}{z}\mathrm{d}z = \int \left(\frac{1}{z} - 1\right)\mathrm{d}z = \int \frac{\mathrm{d}z}{z} - \int \mathrm{d}z = \ln|z| - z + C_1.$$

Interace pravé strany rovnice

$$-\int \frac{\mathrm{d}x}{x}\mathrm{d}x = -\ln|x| + C_2.$$

Rovnice má po integracích tvar

$$\ln|z| - z + C_1 = -\ln|x| + C_2,$$

resp.

$$\ln|z| + \ln|x| - z = C, \quad C = C_2 - C_1,$$

a po odlogaritmování

$$zxe^{-z} = K, \quad K = e^C.$$

Návrat k substituci $z = y/x$ vede k výrazu

$$\frac{y}{x}xe^{-\frac{y}{x}} = K, \quad \text{resp.} \quad ye^{-\frac{y}{x}} = K, \quad \text{nebo} \quad y = Ke^{\frac{y}{x}}$$

což je hledané obecné řešení zadané diferenciální rovnice v implicitním tvaru. Partikulární řešení splňující danou počáteční podmínku určíme tak, že tuto poč. podmínku $y(1) = -1$ dosadíme do obecného řešení a vyčíslíme hodnotu integrační konstanty K

$$-1 = Ke^{\frac{-1}{1}}, \quad Ke^{-1} = -1, \quad K = -e$$

Partikulární řešení zadané diferenciální rovnice má tedy tvar

$$y = -ee^{\frac{y}{x}} = -e^{\frac{y}{x}+1}.$$

Příklad 4 Uvažujme množinu zbytkových tříd modulo 2, $\mathbb{Z}_2 = \{[0]_{\equiv_2}, [1]_{\equiv_2}\}$ a na ní operace sčítání a násobení modulo 2 (označmě je $+$ a $\cdot$). Rozhodněte, jakou algebraickou strukturu tvoří $(\mathbb{Z}_2, +)$ a $(\mathbb{Z}_2, \cdot)$ a k oběma dvojicím sestavte Cayleyho tabulku. Diskutujte obecnou situaci zbytkových tříd modulo n, $\mathbb{Z}_n = \{[0]_{\equiv_n}, [1]_{\equiv_n}, \cdots, [n-1]_{\equiv_n}\}$ s operacemi sčítání a násobení modulo n (tedy jakou struktuu bude obecně tvořit $(\mathbb{Z}_n, +)$ a $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$.
(25 bodů)

Řešení 4 Struktura $(\mathbb{Z}_2, +)$ tvoří komutativní grupu, protože sčítání modulo 2 je na uvedené množině uzavřené, navíc je komutativní i asociativní, neutrální prvek je $[0]_{\equiv_2}$ a inverzní (opačné) prvky jsou $[0]_{\equiv_2}^{-1} = [0]_{\equiv_2}$, a $[1]_{\equiv_2}^{-1} = [1]_{\equiv_2}$.
Struktura $(\mathbb{Z}_2, \cdot)$ tvoří komutativní pologrupu s neutrálním prvkem, protože násobení modulo 2 je na uvedené mnoině uzavřené, navíc je komutativní i asociativní, neutrální prvek je $[1]_{\equiv_2}$. Inverzní prvek k prvku $[0]_{\equiv_2}$ neexistuje, proto struktura netvoří grupu.
V obecném případě struktura $(\mathbb{Z}_n, +)$ bude tvořit komutativní grupu a struktura $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ bude tvořit pologrupu s neutrálním prvkem, protože inverzní prvek k prvku $[0]_{\equiv_n}$ neexistuje.