Přijímací řízení 2018/19 matematika
Přírodovědecká fakulta
Ostravská univerzita
Navazující magisterské studium AMN
1. června 2018

Příklad 1 Najděte hodnotu parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2 - ax}$$

měla v bodě $x = -1$ lokální extrém. Dále určete o jaký extrém se jedná (minimum, maximum).

Řešení 1

1. Spočítáme první derivaci

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x^2-ax}(2x - a)\,,$$

určíme hodnotu derivace v bodě $x = -1$

$$f'(-1) = \mathrm{e}^{1-a}(-2 - a)\,.$$

2. Pro extrém musí platit, že $f'(x) = 0$ a tedy

$$\mathrm{e}^{1-a}(-2-a) = 0 \Leftrightarrow (-2-a) = 0 \Leftrightarrow a = -2\,.$$

Tudíž pro $a = -2$ může funkce $f(x)$ v bodě $x = -1$ nabývat extrém.

3. Ověříme, zda se jedná o extrém a určíme typ extrému. Máme dvě možnosti

   (a) Pomocí druhé derivace:

$$f''(x) = \mathrm{e}^{x^2+2x}(4x^2 + 8x + 6)$$

   Dosazením $x = -1$ do druhé derivace dostaneme

$$f''(-1) = \mathrm{e}^{-1}(2) > 0 \Leftrightarrow f(x) \text{ má v } x = -1 \text{ extrém}$$

   Jelikož je druhá derivace kladná, tak v $x = -1$ nabývá funkce lokálního minima.

Nebo

   (b) Pomocí znaménka první derivace na okolí bodu $x = -1$, např. tabulkou

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$\mathrm{sgn}(f'(x))$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

   První derivace mění na okolí bodu $x = -1$ znaménko a tedy funkce $f(x)$ má v tomto bodě extrém.

   A protože v levém okolí bodu $x = -1$ je derivace záporná a v pravém okolí bodu $x = -1$ je derivace kladná, má funkce v tomto budu lokální minimum.

(25 bodů)

Příklad 2 Řešte soustavu homogenních lineárních algebraických rovnic a určete dimenzi a bázi prostoru řešení:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 &= 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - 9x_3 - 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení 2 Soustavu můžeme řešit maticově. Matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -4 \\ -3 & 2 & -9 & -6 \end{pmatrix}$$

Využijeme řádkové elementární transfromce a budeme upravovat tak, abychom dostali matici na redukovaný trojúhelníkový tvar. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -4 \\ -3 & 2 & -9 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

To znamená, že soustava má řešení: $\overline{x} = (-2t - 8s, 3t - 3s, 2s, 2t)^T$, $t \in \mathbb{R}$. Dimenze prostrou řešení je 2 a báze je například $\{(-2, 3, 0, 2)^T, (-8, -3, 2, 0)^T\}$.

(25 bodů)

Příklad 3 Najděte obecné řešení diferenciální rovnice prvního řádu

$$1 + y^2 + xyy' = 0.$$

Poté nalezněte partikulární řešení splňující podmínku $y(2) = 1$.
[Rovnici rozřešte vzhledem k derivaci y' a proveďte separaci proměnných].

Řešení 3 Diferenciální rovnici napřed rozřešíme vzhledem k derivaci.

$$xyy' = -1 - y^2 = -(1 + y^2), \quad y' = -\frac{1 + y^2}{xy} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1 + y^2}{y} \quad (y \neq 0).$$

Provedeme separaci proměnných

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1 + y^2}{y}, \quad \frac{y\mathrm{d}y}{1 + y^2} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Integrace levé strany rovnice (substitucí $1 + y^2 = z$, $2y\mathrm{d}y = \mathrm{d}z$)

$$\int \frac{y\mathrm{d}y}{1 + y^2} = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{2} \ln(1 + y^2) + C_1$$

Integrace pravé strany

$$-\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\ln|x| + C_2$$

Po integraci obou stran rovnice tedy dostáváme

$$\frac{1}{2} \ln(1 + y^2) + C_1 = -\ln|x| + C_2, \quad \ln(1 + y^2) = -2\ln|x| + C, \quad C = 2(C_2 - C_1),$$

nebo též

$$2\ln|x| \cdot \ln(1 + y^2) = C$$

Po odlogaritmování obdržíme obecné řešení zadané diferenciální rovnice v implicitním tvaru

$$x^2(1 + y^2) = K, \quad K = \mathrm{e}^C, \tag{1}$$

příp. v expilicitním tvaru

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{K}{x^2} - 1}.$$

Partikulární řešení v implicitním tvaru získáme dosazením počáteční podmínky $y(2) = 1$ do obecného řešení (1):

$$2^2(1 + 1^2) = K, \quad K = 8, \quad \text{tedy} \quad x^2(1 + y^2) = 8,$$

nebo partikulární řešení v explicitním tvaru je

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{8}{x^2} - 1}.$$

(25 bodů)

Příklad 4 Popište uvedenou matici A (rozhodněte, zda je symetrická, antisymetrická, regulární nebo singulární, čtvercová, diagonální, trojúhelníková), určete její determinant a rozhodněte, zda k ní existuje matice inverzní (pokud ano, nalezněte ji):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Napište alespoň jednu jinou matici B tak, aby bylo možné vypočítat výraz $2BA - A$ a vypočtěte tento výraz.

Řešení 4 Matice je symetrická, jestliž platí $A = A^T$, kde A^T je matice transponovaná, což neplatí a matice je antisymetrická jestliže $A = -A^T$, což v tomto případě také neplatí, protože prvky na diagonále jsou nenulové. Jedná se o matici čtvercovou 3×3, která není trojúhelníková ani diagonální (mimo diagonálu jsou nenulové prvky).
Determinant můžeme určit například Sarrusovým pravidlem: $\det A = 0 - 12 + 12 + 80 - 0 - 0 = 80 \neq 0$, což zároveň znamená, že matice je regulární a její hodnost je rovna počtu řádků, tj. $h(A) = 3$. K matici tedy bude existovat matice inverzní (můžeme využít řádkové transformace):
Využijeme již spočítaný determinant a subdeterminanty a můžeme ihned určit matici inverzní:

$$A^{-1} = \frac{1}{80} \begin{pmatrix} 9 & 12 & -17 \\ 12 & 16 & 4 \\ 23 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aby bylo možnévypočítat výraz $2BA - A$, musí být součin výraz $2BA$ typu 3×3, tedy můžeme za matici B vybrat například matici jednotkovou daného typu, tedy výraz pak bude

$$2BA - A = 2EA - A = 2A - A = A.$$

(25 bodů)