Přijímací řízení 2015/16
Přírodovědecká fakulta
Ostravská univerzita v Ostravě
Navazující magisterské studium, obor Učitelství matematiky
(10. červen 2016)

Příklad 1 Využitím derivací vyšetřete, na kterých intervalech je funkce

$$f(x) = 3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

rostoucí a na kterých je klesající. Najděte lokální extrémy a inflexní body této funkce.

Řešení: Funkce $f(x)$ je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tedy $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, \infty)$. První derivace

$$f'(x) = -3x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

je rovněž definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a je nulová v jediném bodě $x = 0$.
V intervalu $(-\infty, 0)$ je funkce $f(x)$ *rostoucí*, jelikož platí $f'(x) > 0$ a v intervalu $(0, \infty)$ je funkce $f(x)$ *klesající*, jelikož $f'(x) < 0$.
V bodě $x = 0$ tedy nabývá *lokálního maxima* $f(0) = 3$, o čemž se lze přesvědčit také dosazením do druhé derivace

$$f''(x) = -3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + 3x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad f''(0) = -3 < 0.$$

Žádné jiné extrémy vyšetřovaná funkce nemá.
Inflexní body určíme z nulovosti druhé derivace

$$f''(x) = -3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + 3x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 3e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

Příklad 2 Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic s parametrem a

$$\begin{aligned} (a+1)x_1 + 2x_2 &= 6, \\ x_1 + (a+2)x_2 &= 6. \end{aligned}$$

Diskutujte řešení vzhledem k hodnotě parametru a.

Řešení: Jedná se o nehomogenní soustavu lineárních algebraických rovnic. Matice soustavy

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 2 \\ 1 & a+2 \end{pmatrix}$$

má determinant $\det A = (a+1)(a+2) - 2 = a^2 + 3a = a(a+3)$. Matice rozšířená vypadá

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} a+1 & 2 & 6 \\ 1 & a+2 & 6 \end{array}\right).$$

Pro hodnoty parametru $a \neq 0$ a $a \neq -3$ je matice soustavy regulární a existuje tedy právě jedno řešení soustavy, které lze určit např. Cramerovým pravidlem

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, 2,$$

kde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 6 & a+2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a+1 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Provedeme výpočty determinantů

$$\det A_1 = 6a, \quad \det A_2 = 6a$$

a dostáváme jediné řešení

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{6}{a+3}, \frac{6}{a+3}\right)$$

platné pro všechny hodnoty parametru, pro které $a \neq 0$ a $a \neq -3$.

Pro hodnotu parametru $a = 0$ je matice soustavy singulární. Řádkovými ekvivalentními úpravami převedeme matici rozšířenou $(A|b)$ do tvaru

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

odkud vidíme, že $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b) = 1$. Soustava má nekonečně mnoho řešení, dimenze množiny řešení je 1. Množinu řešení je možno zapsat parametricky např. takto

$$\begin{aligned} x_1 &= 6 - 2t, \\ x_2 &= t, \end{aligned}$$

nebo pomocí fundamentálního systému řešení (báze množiny řešení)

$$(x_1, x_2) = \langle (4, 1) \rangle.$$

Pro hodnotu parametru $a = -3$ je matice soustavy rovněž singulární. Řádkovými ekvivalentními úpravami převedeme matici rozšířenou $(A|b)$ do tvaru

$$\left(\begin{array}{rr|r} -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 18 \end{array}\right).$$

Vidíme, že $\operatorname{rank}(A) \neq \operatorname{rank}(A|b)$, tedy soustava nemá řešení, množina řešení je $\emptyset$.

Příklad 3 Uvažujte množinu

$$M = \{a + b\sqrt[3]{2},\ a, b \in \mathbb{Z}\}$$

a na ní binární operaci $\oplus$ definovanou pro každé $a_1 + b_1\sqrt[3]{2}$, $a_2 + b_2\sqrt[3]{2} \in M$ předpisem

$$(a_1 + b_1\sqrt[3]{2}) \oplus (a_2 + b_2\sqrt[3]{2}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt[3]{2}.$$

Rozhodněte, jakou algebraickou strukturu tvoří dvojice $(M, \oplus)$ (grupoid, pologrupu, monoid, grupu, abelovskou grupu).

Řešení: Ověříme, zda je binární operace $\oplus$ *asociativní*, tzn. zda pro každé $a_1 + b_1\sqrt[3]{2}$, $a_2 + b_2\sqrt[3]{2}$, $a_3 + b_3\sqrt[3]{2} \in M$ platí

$$(a_1+b_1\sqrt[3]{2})\oplus((a_2+b_2\sqrt[3]{2})\oplus(a_3+b_3\sqrt[3]{2})) = ((a_1+b_1\sqrt[3]{2})\oplus(a_2+b_2\sqrt[3]{2}))\oplus(a_3+b_3\sqrt[3]{2}).$$

Vypočteme levou stranu:

$$(a_1 + b_1\sqrt[3]{2}) \oplus ((a_2 + b_2\sqrt[3]{2}) \oplus (a_3 + b_3\sqrt[3]{2})) =$$

$$= (a_1 + b_1\sqrt[3]{2}) \oplus ((a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)\sqrt[3]{2}) = (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)\sqrt[3]{2}.$$

Vypočteme pravou stranu

$$((a_1 + b_1\sqrt[3]{2}) \oplus (a_2 + b_2\sqrt[3]{2})) \oplus (a_3 + b_3\sqrt[3]{2}) =$$

$$= ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt[3]{2}) \oplus (a_3 + b_3\sqrt[3]{2})) = (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)\sqrt[3]{2}.$$

Vidíme, že operace $\oplus$ je skutečně *asociativní* (plyne z asociativity součtu).

Nyní vyzkoušíme, zda je binární operace $\oplus$ také *komutativní*, tzn. zda pro každé $a_1 + b_1\sqrt[3]{2}, a_2 + b_2\sqrt[3]{2} \in M$ platí

$$(a_1 + b_1\sqrt[3]{2}) \oplus (a_2 + b_2\sqrt[3]{2}) = (a_2 + b_2\sqrt[3]{2}) \oplus (a_1 + b_1\sqrt[3]{2}).$$

Vypočteme levou stranu:

$$(a_1 + b_1\sqrt[3]{2}) \oplus (a_2 + b_2\sqrt[3]{2}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt[3]{2}.$$

Vypočteme pravou stranu

$$(a_2 + b_2\sqrt[3]{2}) \oplus (a_1 + b_1\sqrt[3]{2}) = (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)\sqrt[3]{2} = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt[3]{2}.$$

Operace $\oplus$ je také *komutativní* (plyne z komutativity součtu).

Zkusme najít *neutrální* (*nulový*) prvek operace $\oplus$, tzn. prvek $o = o_1 + o_2\sqrt[3]{2} \in M$ takový, že pro libovolné $a + b\sqrt[3]{2} \in M$ platí

$$(a + b\sqrt[3]{2}) \oplus (o_1 + o_2\sqrt[3]{2}) = (o_1 + o_2\sqrt[3]{2}) \oplus (a + b\sqrt[3]{2}) = (a + b\sqrt[3]{2}).$$

Dle předpisu operace dostáváme

$$(a + b\sqrt[3]{2}) \oplus (o_1 + o_2\sqrt[3]{2}) = (a + o_1) + (b + o_2)\sqrt[3]{2} =$$

$$= (o_1 + o_2\sqrt[3]{2}) \oplus (a + b\sqrt[3]{2}) = (o_1 + a) + (o_2 + b)\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt[3]{2}.$$

Takže pro libovolné $a, b \in \mathbb{Z}$ dostáváme

$$\begin{aligned} a + o_1 = o_1 + a &= a, \\ b + o_2 = o_2 + b &= b. \end{aligned}$$

Rovnice lze splnit jedině tak, že $o_1 = o_2 = 0 \in \mathbb{Z}$. Takže *neutrálním* prvkem operace $\oplus$ na M musí být prvek $o = 0 + 0\sqrt[3]{2} \in M$.

Nakonec vyzkoušíme, zda libovolný prvek $a + b\sqrt[3]{2} \in M$ má *inverzní* (opačný) prvek, označme jej např. $(a + b\sqrt[3]{2})^* = a^* + b^*\sqrt[3]{2}$, takový, že

$$(a + b\sqrt[3]{2}) \oplus (a + b\sqrt[3]{2})^* = (a + b\sqrt[3]{2})^* \oplus (a + b\sqrt[3]{2}) = o = 0 + 0\sqrt[3]{2}.$$

Dle předpisu operace dostáváme

$$(a + b\sqrt[3]{2}) \oplus (a^* + b^*\sqrt[3]{2}) = (a + a^*) + (b + b^*)\sqrt[3]{2} =$$

$$= (a^* + b^*\sqrt[3]{2}) \oplus (a + b\sqrt[3]{2}) = (a^* + a) + (b^* + b)\sqrt[3]{2} = 0 + 0\sqrt[3]{2}.$$

Takže pro libovolné $a, b \in \mathbb{Z}$ dostáváme

$$\begin{aligned} a + a^* = a^* + a &= 0, \\ b + b^* = b^* + b &= 0. \end{aligned}$$

Rovnice lze splnit jedině tak, že $a^* = -a \in \mathbb{Z}$ a $b^* = -b \in \mathbb{Z}$. Takže *inverzním* (opačným) prvkem k prvku $a + b\sqrt[3]{2}$ je prvek $(a + b\sqrt[3]{2})^* = a^* + b^*\sqrt[3]{2} = -a - b\sqrt[3]{2} \in M$.

Závěr: Dvojice $(M, \oplus)$ je *komutativní grupa.*

Příklad 4 Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice

$$(x + 1)y' + xy = 0$$

splňující počáteční podmínku $y(1) = 1$.

Řešení: Derivaci y' zapíšeme jako $y' = dy/dx$

$$(x + 1)\frac{dy}{dx} + xy = 0,$$

a provedeme separaci proměnných

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x}{x + 1}dx.$$

Podmínky separace jsou $y \neq 0$ a $x + 1 \neq 0$. Splnění podmínky $x + 1 \neq 0$ je samozřejmostí , jinak by zadaná rovnice nebyla diferenciální rovnicí. Nulová funkce $y = 0$ je triviálním řešením diferenciální rovnice. Po integraci obou stran rovnice dostáváme

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x}{x + 1}dx = -\int \frac{x + 1}{x + 1}dx + \int \frac{1}{x + 1}dx$$

$$\ln|y| = -x + \ln|x + 1| + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná integrační konstanta. Po odlogaritmování obou stran poslední rovnice dostáváme obecné řešení v explicitním tvaru

$$y(x) = \bar{C}\mathrm{e}^{-x}(x + 1).$$

kde $\bar{C} \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta. Partikulární řešení splňující počáteční podmínku $y(1) = 1$ určíme tak, že dosadíme poč. podmínku do obecného řešení

$$y(1) = \bar{C}\mathrm{e}^{-1}(1+1) = \frac{2\bar{C}}{\mathrm{e}} = 1.$$

a vyjádříme hodnotu integrační konstanty $\bar{C} = \mathrm{e}/2$. Hledané partikulární řešení zadané diferenciální rovnice pak je

$$y_p(x) = \frac{\mathrm{e}}{2}\mathrm{e}^{-x}(x+1) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x+1}(x+1).$$