Přijímací řízení 2012/13
Přírodovědecká fakulta
Ostravská univerzita v Ostravě
Navazující magisterské studium

Příklad 1 Vyšetřete průběh funkce v jejím maximálním definičním oboru.

$$f(x) = (x+2)^{\frac{5}{3}} + 1.$$

Řešení:

Příklad 2 Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Rozhodněte, zda se jedná o soustavu homogenní nebo nehomogenní. V případě homogenní soustavy určete dimenzi a bázi řešení této soustavy.

Rešení: Jedná se o homogenní soustavu rovnic, protože vektor pravých stran je nulový. Taková soustava má buď právě jedno řešení a je ním nulový vektor, nebo má nekonečně mnoho řešení, jenž tvoří vektorový podprostor $\mathbb{R}^3$.
Maticově tedy zapíšeme jako

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Využijeme řádkové elementární transfromce a budeme upravovat tak, abychom dostali matici trojúhelníkovou, například horní. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{-5}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

což znamená, že soustava má nekonečně mnoho řešení, $(t,t,t)^T$. Dimenze prostoru řešení je jedna a báze je například $\beta = \{(1,1,1)^T\}$.

Příklad 3 Určete objem tělesa vytvořeného rotací kolem osy x té části paraboly $y = x^2 - 4$, která je vyťata osou x.

Rešení: Z funkčního předpisu snadno určíme, že graf funkce protíná osu x v bodech -2 a 2. Objem tedy bude určen jako

$$S = 2\int_0^2 \pi(x^2-4)^2 dx = 2\pi\Big[\frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 16x\Big]_0^2 = 2\pi\frac{256}{15} = \frac{512\pi}{15}.$$

Objem je $\frac{512\pi}{15}$.

Příklad 4 Na množině celých čísel definujme relaci kongruence modulo 4 jako

$$a \equiv b \mod 4 \iff 4 \mid (a-b).$$

Dokažte, že se jedná o relaci ekvivalence. Rozhodněte, zda struktura $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ zbytových tříd modulo 4 s operací sčítání a násobení modulo 4 tvoří okruh, obor integrity nebo těleso. Operace jsou definovány následovně:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}_4 : [a]_{\equiv_4} + [b]_{\equiv_4} = [a+b]_{\equiv_4}$$

a

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}_4 : [a]_{\equiv_4} \cdot [b]_{\equiv_4} = [a \cdot b]_{\equiv_4}.$$

Rešení: Jedná se o relaci ekvivalence, protože je reflexivní, symetrická a tranzitivní.
Reflexivita:

$$\forall a \in \mathbb{Z} : 4 \mid (a-a) \Longrightarrow a \equiv a \mod 4,$$

Symetrie:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : a \equiv b \mod 4 \Longleftrightarrow 4 \mid (a-b) \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a - b = 4k, \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow b - a = 4(-k), -k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow b \equiv a \mod 4,$$

Tranzitivita:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : a \equiv b \mod 4,\ b \equiv c \mod 4 \Longleftrightarrow 4 \mid (a-b),\ 4 \mid (b-c) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z} : a - b = 4k,\ b - c = 4l \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow a - b + b - c = 4(k+l), k + l \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow a - c = 4(k+l) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow a \equiv c \mod 4.$$

Snadno ověříme, že obě operace jsou uzavřené, komutativní, asociativní a provázané distributivním zákonem. Aditivní neutrální prvek je $[0]_{\equiv_4}$ a multiplikativní neutrální prvek je $[1]_{\equiv_4}$. Opačný prvek k prvku $[a]_{\equiv_4}$ je prvek $[-a]_{\equiv_4}$ tedy struktura tvoří okruh. Netvoří ale obor integrity, protože existují dělitele nuly, např. $[2]_{\equiv_4} \cdot [2]_{\equiv_4} = [2 \cdot 2]_{\equiv_4} = [4]_{\equiv_4} = [0]_{\equiv_4}$.