Přijímací řízení 2012/13
Přírodovědecká fakulta
Ostravská univerzita v Ostravě

Příklad 1 *Upravte výraz*

$$\frac{(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1)(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1)}{(\frac{x^4}{y^2}-\frac{y^4}{x^2}):(x^2-y^2)}$$

Rešení: Definiční obor bude $x, y \in \mathbb{R}-\{0\}$ a zároveň $x \neq \pm y$. Při úpravách budeme využívat binomických vzorců- v čitateli se jedná o součin $(a-b)(a+b)$ pokud si označíme $a = \frac{x}{y}+\frac{y}{x}, b = 1$, a zároveň člen, kterým dělíme ve jmenovateli přejde na součin v čitateli, tedy

$$\frac{(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1)(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1)}{(\frac{x^4}{y^2}-\frac{y^4}{x^2}):(x^2-y^2)} = \frac{((\frac{x}{y}+\frac{y}{x})^2-1)(x^2-y^2)}{\frac{x^4}{y^2}-\frac{y^4}{x^2}} =$$

nyní můžeme dát rozdíly zlomků v čitateli i ve jmenovateli na společný zlomek a v čitateli umocnit dvojčlen

$$= \frac{((\frac{x^2+y^2}{xy})^2-1)(x^2-y^2)}{\frac{x^6-y^6}{x^2y^2}} = \frac{((\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2y^2})-1)(x^2-y^2)}{\frac{x^6-y^6}{x^2y^2}}$$

a rozdíl v čitateli dáme opět na společný jmenovatel

$$= \frac{(\frac{x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2}{x^2y^2})(x^2-y^2)}{\frac{x^6-y^6}{x^2y^2}} =$$

a teď za předpokladu, že $x \neq 0, y \neq 0$ můžeme krátit členem x^2y^2

$$= \frac{(x^4+x^2y^2+y^4)(x^2-y^2)}{x^6-y^6} =$$

a s využitím rozkladu $x^6-y^6 = (x^2)^3-(y^2)^3 = (x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$.

$$= \frac{(x^4+x^2y^2+y^4)(x^2-y^2)}{(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)} = 1.$$

Příklad 2 *Vyřešte nerovnici s absolutní hodnotou*

$$\mid 3x-6 \mid < x+2.$$

Rešení: Nejdříve určíme nulové body, v našem případě $3x-6=0 \Rightarrow x=2$ a tedy budeme nerovnici řešit samostatně na dvou intervalech

$$(-\infty, 2],\ (2, \infty).$$

V prvním intervalu odstraněním absolutní hodnoty dostaneme
$-3x+6 < x+2$
$4 < 4x$
$x > 1$,
takže řešením jsou všechny $x \in (1, 2]$.
Na druhém intervalu pak dostaneme po odstranění absolutní hodnoty
$3x-6 < x+2$
$2x < 8$
$x < 4$,
takže řešením jsou všechny $x \in (2, 4)$.
Řešením nerovnice jsou všechna reálná čísla $x \in (1, 4)$.

Příklad 3 *Strany pravoúhlého trojúhelníku tvoří aritmetickou posloupnost, delší odvěsna je* 24. *Vypočtěte obvod trojúhelníku.*

Rešení: Víme, že delší odvěsna, označme ji $a = 24$ a strany tvoří aritmetickou posloupnost, tedy menší odvěsna bude $b = 24-d$ a přepona (nejdelší strana) bude $c = 24+d$. V pravoúhlém trojúhleníku platí Pythagorova věta, tj.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

což po dosazení dává

$$24^2 + (24 - d)^2 = (24 + d)^2$$

Upravujeme

$$24^2 + 24^2 - 48d + d^2 = 24^2 + 48d + d^2$$

tedy $24^2 = 96d \Rightarrow d = 6$. Strany budou $b = 18$ a $c = 30$ a pak obvod $O = a + b + c = 24 + 18 + 30 = 72$.

Příklad 4 *Řešte exponenciální rovnici*

$$\frac{256}{2^{x+3}} = 0.25^{2-x}.$$

Rešení: V rovnici upravíme všechny základy na stejný základ 2 užitím $256 = 2^8$ a $0.25 = 2^{-2}$. Dostaneme

$$\frac{2^8}{2^{x+3}} = \left(2^{-2}\right)^{2-x}.$$

Tedy

$$2^{8-x-3} = 2^{-4+2x}$$

Z rovnosti základů plyne rovnost exponentů, tudíž $5 - x = 2x - 4 \Rightarrow x = 3$. Řešením rovnice je $x = 3$.

Příklad 5 *Řešte goniometrickou rovnici*

$$\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0.$$

Rešení: Nejdříve upravíme rovnici tak, aby se v ní vyskytovala pouze jedna goniometrciká funkce, např. použitím $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Obdržíme rovnici

$$\sin^2 x + \sin^2 x - 1 + \sin x = 0,$$

po úpravě

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Nyní použijeme substituci $\sin x = t$ a vyřešíme kvadratickou rovnici $2t^2+t-1 = 0$. Její kořeny jsou $t_1 = -1$ a $t_2 = \frac{1}{2}$. Dopočteme $\sin x$ tedy

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

a

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

vede na $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ nebo $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Příklad 6 *Pro jaký parametr a má soustava rovnic právě jedno řešení?*
$2x - y = 8$
$ax + y = 10.$

Rešení: Soustava dvou lineárních algebraických rovnic může mít buď právě jedno řešení, nebo žádné řešení, nebo nekonečně mnoho řešení. K řešení lze využít něktrou z metod (sčítací, dosazovací, srovnávací) nebo také maticového počtu. Například medotou sčítací- obě rovnice sečteme, dostaneme $(2 + a)x = 18$ a aby existovalo právě jedno řešení, musí být člen $2 + a \neq 0$ tedy $a \neq -2$.

Příklad 7 *Napište rovnici přímky, procházející bodem $A = [5, 3]$ a kolmé k přímce určené body $C = [4, 7],\ D = [-4, -5]$.*

Rešení: Na určení parametrické rovnice přímky potřebujeme znát bod a směrový vektor, pro obecnou rovnici pak bod a normálový vektor. Jelikož je hledaná přímka kolmá k přímce určené body $C = [4, 7]$, $D = [-4, -5]$, pak směrový vektor $\vec{CD} = D - C = (-8, -12)$ bude normálovým vektorem hledané přímky. Její obecná rovnice bude $ax + by + c = 0$ kde (a, b) je normálový vektor, tj. $-8x - 12y + c = 0$. Hodnotu c dopočteme dosazením souřadnic bodu $A = [5, 3]$, kterým tato přímka prochází:

$$-8 \cdot 5 - 12 \cdot 3 + c = 0 \Rightarrow c = 76.$$

Rovnice přímky bude $-8x - 12y + 76 = 0$, resp. po úpravě $2x + 3y - 19 = 0$.

Příklad 8 *Určete definiční obor funkce $y = \frac{1-x}{1+x}$, a určete funkci k ní inverzní. Má inverzní funkce speciální tvar a pokud ano, proč?*

Rešení: Definiční obor jsou všechna reálná čísla kromě $x = -1$, protože ve jmenovateli nesmí být nula. Inverzní funkci dostaneme jako $x = \frac{1-y}{1+y}$, což po úpravě bude $y = \frac{1-x}{1+x}$, tedy inverzní funkce je stejná jako byla funkce původní. Je tomu tak proto, že funkce $f(x)$ byla souměrná podle osy prvního a třetího kvadrantu.