OSTRAVSKÁ UNIVERZITA

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
KATEDRA TECHNICKÉ A PRACOVNÍ VÝCHOVY

ZÁKLADY HYDROMECHANIKY

Pavel Dostál

Ostrava 2021

Recenzoval: Mgr. Radim Štěpánek, Ph.D.

© Ing. Pavel Dostál, Ph.D.

ISBN 978-80-7599-230-7

PŘEDMLUVA

Tato studijní textová opora je určena především pro studenty bakalářského studijního oboru *odborné předměty se zaměřením na vzdělávání* realizovaného kombinovanou formou na Pedagogické fakultě Ostravské univerzity. Cílem je pomoci studentům zprostředkovat základní informace a pochopit základní zákonitosti hydromechaniky.

Po úvodní pasáži věnované vybraným základním pojmům z mechaniky tekutin je následují text rozdělen na dvě hlavní části pojednávající o vybraných základních kapitolách z hydrostatiky (tlak, tlak v kapalině, rovnováha na rozhraní tekutin, tlaková síla na ponořenou vodorovnou stěnu, plování těles) a z hydrodynamiky (základy proudění, ustálený tok ideální kapaliny, ustálený tok skutečných kapalin).

Předpokladem pro úspěšné studium je základní znalost matematiky a fyziky na úrovni základního vzdělání a předchozího bakalářského studia.

Forma této studijní textové opory je volena tak, aby umožňovala jak studium v tištěné podobě, tak možnost studia přímo z počítače. Text je doplněn názornými ilustracemi a řešenými příklady. Doporučuji Vám uvedené příklady propočítat a pokročit ke studiu další kapitoly až po zvládnutí předchozí pasáže. Doporučuji Vám studovat jednotlivé kapitoly postupně, protože na sebe logicky navazují a úspěšné pochopení učiva je obvykle podmíněno zvládnutím předchozích kapitol.

Dále Vám doporučuji ihned si značit případné otázky, připomínky, či nejasnosti. Můžete se s nimi obrátit na autora, nejlépe elektronickou poštou. Autor bude na tyto podněty reagovat buď přímo stejnou cestou, nebo se k nim vyjádří v prezenční části výuky.

Autor je absolventem inženýrského (1994) a postgraduálního doktorského (2001) studia na Fakultě strojní Vysoké školy báňské – Technické univerzity v Ostravě v oboru *strojírenská technologie*. Předměty zaměřené na hydromechaniku vyučuje v kombinované a prezenční formě studia už dvacet let. Dále se věnuje výuce strojírenské technologie a konstrukce, technické grafiky, technických materiálů a environmentalistiky.

Ke zpřehlednění textu jsou použity následující doprovodné prvky:

☞ klíčová slova

CÍL cíle kapitoly

OPAKUJ doporučená literatura k opakování před započetím studia kapitoly

OSNOVA osnova kapitoly

Př. řešené příklady

(1.1.1) tímto způsobem jsou číslovány vzorce

obr. 1.1 takto jsou v textu označena čísla ilustrací

(1) kurzívou psaná čísla v kulatých závorkách jsou odkazem na zdroj, z něhož bylo čerpáno (pod tímto číslem je uveden v seznamu literatury)

Přeji Vám úspěšné studium.

OBSAH

PŘEDMLUVA **3**

OBSAH **5**

SEZNAM ZNAČEK A ZKRATEK **6**

1 ÚVOD **8**

2 HYDROSTATIKA **10**

2.1 TLAK 10
2.2 TLAK V KAPALINĚ 11
2.3 ROVNOVÁHA NA ROZHRANÍ TEKUTIN 18
2.4 TLAKOVÁ SÍLA NA PONOŘENOU VODOROVNOU STĚNU 22
2.5 PLOVÁNÍ TĚLES 24

3 HYDRODYNAMIKA **27**

3.1 ZÁKLADY PROUDĚNÍ 27
3.2 USTÁLENÝ TOK IDEÁLNÍ KAPALINY 30
3.3 USTÁLENÝ TOK SKUTEČNÝCH KAPALIN 37

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ **47**

SEZNAM ZNAČEK A ZKRATEK

apod.	… a podobně	
at	… technická atmosféra (stará jednotka tlaku; 1 at = 98 066,5 Pa)	
atd.	… a tak dále	
atm	… fyzikální atmosféra (stará jednotka tlaku; 1 atm = 101 325 Pa)	
d	… průměr	[m]
e	... měrná energie	[$J \cdot kg^{-1}$]
e_g	... měrná gravitační potenciální energie	[$J \cdot kg^{-1}$]
e_k	... měrná kinetická energie	[$J \cdot kg^{-1}$]
e_p	... měrná tlaková potenciální energie	[$J \cdot kg^{-1}$]
e_{Zm}	... měrná místní ztrátová energie	[$J \cdot kg^{-1}$]
e_{Zt}	... ztrátová měrná energie třením	[$J \cdot kg^{-1}$]
g	… tíhové zrychlení	[$m \cdot s^{-2}$]
h	… hloubka, výška	[m]
h_d	… rychlostní výška	[m]
h_g	… geodetická výška	[m]
h_p	… tlaková výška	[m]
h_s	… statická výška	[m]
kg	… kilogram (jednotka hmotnosti)	
kp	… kilopond (stará jednotka síly; 1 kp = 9,80665 N)	
l	… délka, dráha	[m]
m	… hmotnost	[kg]
m	… metr (jednotka délky)	
např.	… například	
obr.	… obrázek	
p	... tlak	[Pa]
p_c	... celkový tlak	[Pa]
p_d	... dynamický tlak	[Pa]
p_b	... atmosférický tlak	[Pa]
p_h	... hydrostatický tlak	[Pa]
p_s	... statický tlak	[Pa]
p_v	... vnější tlak	[Pa]
p_{Zm}	... tlaková místní ztráta	[Pa]
p_{Zt}	... tlaková ztráta třením	[Pa]
psi	… anglosaská jednotka tlaku (1 psi = 6 894,757293 Pa)	
s	… sekunda (jednotka času)	
tzv.	… takzvaný	
v	... rychlost	[$m \cdot s^{-1}$]

w	... rychlost	$[m \cdot s^{-1}]$
w_{max}	... maximální rychlost	$[m \cdot s^{-1}]$
y	… vzdálenost	[m]
E	... energie	[J]
E_c	... celková energie	[J]
E_g	... gravitační potenciální energie	[J]
E_k	... kinetická (pohybová) energie	[J]
E_m	... mechanická energie	[J]
E_p	... tlaková potenciální energie	[J]
E_{pt}	... potenciální (polohová) energie	[J]
F	... síla	[N]
F_v	... vnější síla	[N]
F_{vz}	... vztlaková síla	[N]
F_{vz}'	... zmenšená vztlaková síla (na částečně vynořené těleso)	[N]
G	... tíha	[N]
G_{kap}	... tíha kapaliny	[N]
J	… joule (jednotka energie)	
K	… kelvin (jednotka teploty)	
N	… newton (jednotka síly)	
Q_m	… hmotnostní průtok	$[kg \cdot s^{-1}]$
Q_V	… objemový průtok	$[m^3 \cdot s^{-1}]$
Pa	… pascal (jednotka tlaku)	
Re	… Reynoldsovo číslo	[-]
S	… obsah plochy	$[m^2]$
V	… objem	$[m^3]$
V'	… objem ponořené části tělesa	$[m^3]$
T	… teplota	[K]
α	... úhel otevření armatury	[°]
δ	... úhel rozšíření, zúžení nebo změny směru proudové trubice	[°]
ε	... absolutní drsnost potrubí	[m]
η	… dynamická viskozita	$[kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}]$
λ	... součinitel ztráty třením	[-]
ν	… kinematická viskozita	$[m^2 \cdot s^{-1}]$
ξ	... součinitel místní ztráty	[-]
ρ	… hustota	$[kg \cdot m^{-3}]$
ρ_K	… hustota kapaliny	$[kg \cdot m^{-3}]$
ρ_T	… hustota tělesa	$[kg \cdot m^{-3}]$
τ	... čas	[s]
τ	… tečné napětí	[Pa]

ÚVOD

Mechanika tekutin je věda o rovnováze a pohybu **tekutin**.

Tekutina je spojitá látka se stejnými vlastnostmi ve všech směrech tvořená z velmi malých částic, které spojitě vyplňují daný prostor a mohou se snadno po sobě posouvat za působení vnějších sil (neboli může téct). Nemá vlastní tvar, přejímá tvar prostoru, v němž je obsažena. **Tekutiny** se dělí na **kapaliny** a **vzdušiny**.

Kapalina je těžko stlačitelná tekutina zaujímající určitý objem, který se mění jen nepatrně se změnami tlaku a teploty. Její tvar je dán tvarem nádoby, v níž se vlivem zemské přitažlivosti nachází v její spodní části a vytváří volný povrch, který se nazývá hladina. Kapalina může (díky přitažlivým silám mezi částicemi) tvořit kapky.

Vzdušina je snadno stlačitelná tekutina, která mění svůj objem se změnami tlaku a teploty. Snadno mění svůj tvar a zaujímá celý prostor, ve kterém se nachází. **Vzdušiny** se dělí na **plyny** a **páry**.

Protože jsou vlastnosti skutečných tekutin složité a matematické vyjádření zákonitostí, podle nichž se skutečné tekutiny chovají, je často relativně komplikované, byly zavedeny pojmy **ideální tekutina**, **ideální kapalina** a **ideální plyn**, které mají některé zjednodušené vlastnosti umožňující relativně jednodušší matematický popis. Skutečné tekutiny se svými vlastnostmi více či méně od vlastností ideálních tekutin liší. Pokud si nevystačíme s relativně jednoduchými zákony odvozenými pro ideální tekutiny, buď se aplikují pro skutečné tekutiny opravné součinitele a doplňkové veličiny (obvykle určované empiricky), nebo se k výpočtům a modelování využívají počítače.

Ideální tekutina je dokonale tekutá látka bez vnitřního tření (nebrání se změně tvaru).

Ideální kapalina je dokonale tekutá nestlačitelná tekutina bez vnitřního tření a bez existence mezimolekulárních sil.

Ideální plyn je dokonale tekutá stlačitelná tekutina bez vnitřního tření a bez existence mezimolekulárních sil.

Skutečné tekutiny se od ideálních odlišují především těmito vlastnostmi:

- Mají nenulové vnitřní tření (**viskozitu**, vazkost), které vyvolává síly působící proti vzájemnému přesouvání částic tekutiny po sobě. Tekutiny s malým vnitřním třením jsou "tekutější" než tekutiny viskóznější. Jeli-li tekutina v rovnováze v klidu, nedochází k přesouvání částic, a proto se ve statice vazkost neuplatní a zákony pro ideální tekutiny platí i pro skutečné.

- Mezi molekulami tekutin působí přitažlivé síly (**kohezní síly**) podmiňující soudržnost tekutiny.
- Mezi molekulami tekutin a stěnami těles, s nimiž jsou tekutiny ve styku, působí **adhezní síly**, které jsou příčinou přilnavosti tekutiny na tuhá tělesa.
- **Stlačitelnost** skutečných tekutin se liší od ideální. Skutečné kapaliny mění svůj objem při změně tlaku nepatrně, při obvyklých změnách tlaku můžeme považovat kapaliny za nestlačitelné, k jejich stlačitelnosti je třeba přihlížet jen při velkých tlakových rozdílech (např. u některých hydraulických strojů).
- **Roztažnost** tekutin - tekutiny mění svůj objem se změnami teploty. Kapaliny mění svůj objem (a tím i hustotu) vlivem teploty málo - obvykle považujeme hustotu kapalin za konstantní.
- **Absorpce** plynů - kapaliny jsou schopné pohlcovat plyny, což mění jejich vlastnosti (každý vodák zná, jak mění absorbovaný vzduch pod jezem hustotu vody). Objem pohlceného plynu v kapalině je závislý na druhu kapaliny a plynu, teplotě a tlaku plynu nad kapalinou. Díky absorpci vzdušného kyslíku ve vodě je možný život aerobních organismů pod hladinou (s teplotou schopnost absorpce kyslíku ve vodě klesá), absorpce plynů v kapalinách se využívá v mnoha průmyslových technologiích.
- Tekutiny můžou vytvářet i **směsi** s pevnými látkami, což samozřejmě mění jejich vlastnosti.
- Pokud tekutina **mění** své **skupenství**, nebo se nachází ve stavu blízkém změně skupenství, mění se významně i její vlastnosti.

Mechanika tekutin se dělí na **hydromechaniku** a **aeromechaniku**.

Hydromechanika je část mechaniky tekutin zabývající se kapalinami. Dělí se na **hydrostatiku** a **hydrodynamiku**.

Hydrostatika je část hydromechaniky zabývající se rovnováhou kapalin a jejich účinků na tuhá tělesa v klidu.

Hydrodynamika je část hydromechaniky zabývající se pohybem kapalin a jejich působením na tuhá tělesa při jejich vzájemném pohybu.

Hydraulika je aplikovaná věda, která využívá teoretických zákonitostí hydromechaniky k technickým účelům.

Aeromechanika je část mechaniky tekutin zabývající se vzdušinami. Dělí se na **aerostatiku** a **aerodynamiku**. Aeromechanika není předmětem tohoto studijního materiálu.

2 HYDROSTATIKA

☞ *hydrostatika, tlak, Pascalův zákon, Archimédův zákon, vnější tlak, hydrostatický tlak, statický tlak, tlaková síla, vztlaková síla*

CÍL V této kapitole se seznámíte s vybranými kapitolami ze základů hydrostatiky.

OSNOVA

2.1 TLAK
2.2 TLAK V KAPALINĚ
2.3 ROVNOVÁHA NA ROZHRANÍ TEKUTIN
2.4 TLAKOVÁ SÍLA NA PONOŘENOU VODOROVNOU STĚNU
2.5 PLOVÁNÍ TĚLES

OPAKUJ

- základy statiky na úrovni předchozího bakalářského studia

Hydrostatika je část mechaniky tekutin, která se zabývá mechanickými vlastnostmi kapalin a jejich účinku na tuhá tělesa **v klidu**.

Kapalina je v rovnováze v klidu, jestliže se její částečky nepohybují vzhledem ke stěnám nádoby, v níž se nachází, a kapalina nemění svůj tvar.

2.1 TLAK

Tlak (obvykle se označuje **p)** je v hydromechanice důležitou fyzikální veličinou. Obecně tlak **vyjadřuje poměr velikosti síly F na plochu S**, tedy:

$$\mathbf{p = \frac{F}{S}} \qquad (2.1.1).$$

Poznámka: Vztah (2.1.1) platí pouze pro sílu, která působí kolmo na rovinnou plochu a je na této ploše rovnoměrně spojitě rozložena. Pokud by nebyla síla na dané ploše rozložena rovnoměrně, byl by tlak v různých bodech této plochy různý a měli bychom použít obecnější vztah (v diferenciálním tvaru) pro tzv. místní tlak:

$$p = \frac{dF}{dS} \qquad (2.1.2).$$

Hlavní jednotkou tlaku je pascal [Pa]. 1 Pa vyjadřuje sílu 1 N působící kolmo na plochu 1 m^2. Tlak 1 Pa je „malý“, proto bývají často používány jednotky násobné:

1 kilopascal [kPa] = 10^3 Pa;

1 megapascal [MPa] = 10^6 Pa.

V technické praxi se často setkáváme i s jinými jednotkami tlaku:

1 bar [bar] = 10^5 Pa;

1 torr [Torr] ≈ 133,322 Pa (hydrostatický tlak 1 mm rtuťového sloupce);

1 fyzikální atmosféra [atm] = 101 325 Pa;

1 technická atmosféra [at] = 98 066,5 Pa (= 1 kilopond na centimetr čtvereční);

1 kilopond na metr čtvereční [kp/m^2] = 9,80665 Pa (hydrostatický tlak 1 mm vodního sloupce);

1 libra síly na čtvereční palec [psi] ≈ 6 894,757293 Pa.

2.2 TLAK V KAPALINĚ

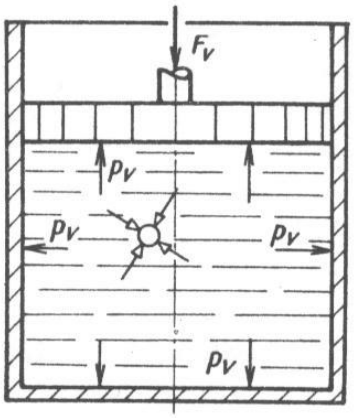
Tlak v kapalině v klidu (statický tlak) může být vyvolán:

- **vnější silou (tzv. vnější tlak);**
- **vlastní tíhou kapaliny (tzv. hydrostatický tlak).**

2.2.1 Vnější tlak

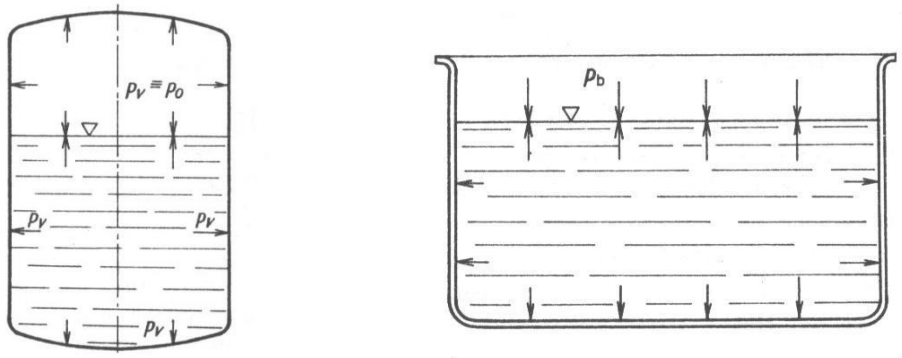
Vnější tlak (bude označován p_v) je vyvolán silami působícími na kapalinu z vnějšku. Může být vyvozen:

a/ vnější silou působící na píst v uzavřeném prostoru (válci); plocha pístu je ve styku s hladinou kapaliny;



Obr. 2.1: Vnější tlak v kapalině vyvozený vnější silou působící na píst *(1)*.

b/ tlakem tekutiny (např. stlačeným plynem) působícím na hladinu kapaliny v uzavřené nádobě nebo atmosférickým tlakem vzduchu (p_b) působícím na hladinu otevřené nádoby.

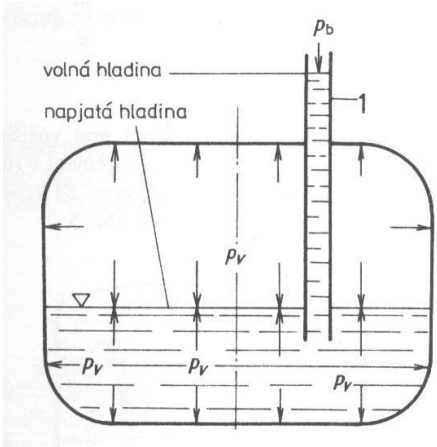


a/ b/

Obr. 2.2: Vnější tlak v kapalině; a/ vyvozený tlakem tekutiny v uzavřené nádobě; b/ vyvozený atmosférickým tlakem na hladinu otevřené nádoby *(1)*.

Volná hladina se nazývá ta hladinová plocha, na niž působí atmosférický tlak.

Napjatá hladina se nazývá ta hladinová plocha, na niž působí jiný než atmosférický tlak.



Obr. 2.3: Volná hladina x napjatá hladina *(1)*.

<u>Pascalův zákon: Tlak vyvolaný vnější silou je ve všech místech kapaliny stejný.</u> Na plochy stěn nádoby a ponořených těles působí kolmo. Pascalův zákon platí i pro stlačitelné tekutiny. **Pokud neuvažujeme působení tíhového pole Země, pak je tlak v celém objemu kapaliny stejný a je roven tlaku na povrchu kapaliny.**

Tlaková síla je výsledný silový účinek kapaliny na stykovou plochu:

$$F = p \cdot S \qquad (2.2.1).$$

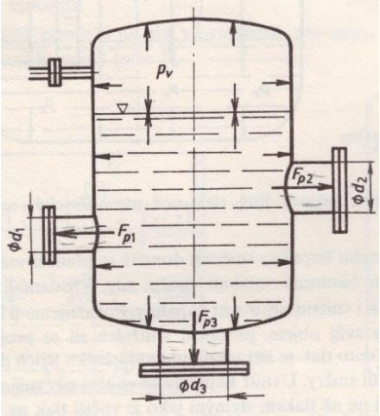
Tlaková energie (E_p) je energie zapříčiněná tlakem v tekutině. Pokud se může stěna nádoby pohybovat, např. píst, může být tlaková energie přeměněna na pohybovou, respektive píst může konat práci. Jednotkou energie je joule [J] Tlaková energie je dána vztahem:

$$E_p = p \cdot V \qquad (2.2.2),$$

kde V je objem tekutiny.

Př. 1

V tlakové nádobě je voda (o hustotě 1000 kg·m^{-3}) pod vnějším tlakem 20 MPa. Je opatřena kruhovými víky podle obr. 2.4. První víko má průměr d_1 = 150 mm a jeho střed je v hloubce h_1 = 500 mm, druhé víko d_2 = 250 mm a h_2 = 300 mm, třetí víko d_3 = 400 mm a h_3 = 1000 mm. Určete tlakové síly na jednotlivá víka, tíhu kapaliny zanedbejte.



Obr. 2.4: Schematické znázornění tlakové nádoby pro příklad 1 *(1)*.

Dáno: ρ = 1000 kg·m^{-3}

p_v = 20 MPa = 20·10^6 Pa

d_1 = 150 mm = 0,15 m

h_1 = 500 mm = 0,5 m

d_2 = 250 mm = 0,25 m

h_2 = 300 mm = 0,3 m $\qquad$ F_{p1} = ?

d_3 = 400 mm = 0,4 m $\qquad$ F_{p2} = ?

h_3 = 1000 mm = 1 m $\qquad$ F_{p3} = ?

Pro výpočet tlakových sil použijeme vztah (2.1.1):

$$F = p \cdot S,$$

přičemž pokud podle zadání zanedbáme tíhu kapaliny, je tlak v kapalině roven vnějšímu tlaku. Obsahy ploch jednotlivých vík vypočteme podle známých vztahů pro výpočet plochy kruhu:

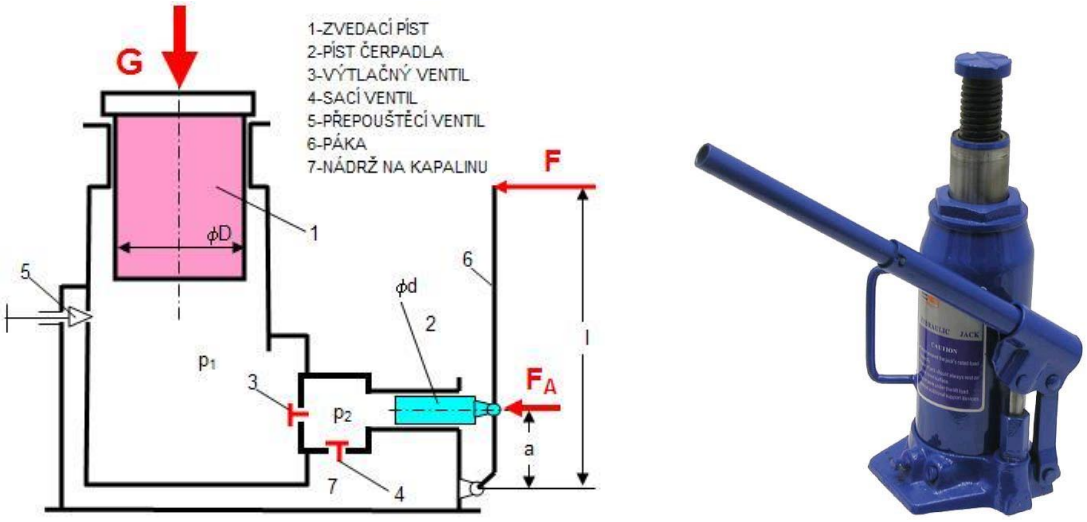
$$F_{p1} = p_v \cdot S_1 = p_v \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_1^2 = 20 \cdot 10^6\ \text{Pa} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0{,}15\,\text{m})^2 = 353\,429\ \text{N} \approx 353{,}4\,\text{kN}$$

$$F_{p2} = p_v \cdot S_2 = p_v \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_2^2 = 20 \cdot 10^6\ \text{Pa} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0{,}25\,\text{m})^2 = 981\,748\ \text{N} \approx 981{,}7\,\text{kN}$$

$$F_{p3} = p_v \cdot S_3 = \ldots$$

Odpověď: Tlaková síla na první víko je 353,4 kN, tlaková síla na druhé víko je 981,7 kN, obdobně dopočtěte tlakovou sílu na třetí víko.

Z Pascalova zákona vychází hydraulická zařízení, která využívají přenosu tlaku a tím i tlakové síly mezi písty, přičemž na velikosti jednotlivých pístů závisí velikost tlakových sil. Příkladem jsou hydraulické zvedáky nebo hydraulické lisy.



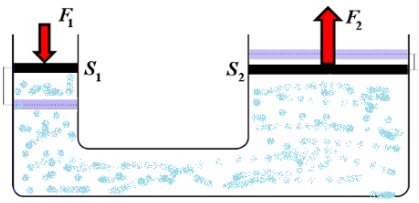
Obr. 2.5: Hydraulický zvedák – princip a příklad *(2)*.

Př. 2

Obsahy průřezů válců hydraulického zvedáku jsou 20 cm^2 a 800 cm^2. Na menší píst působí síla o velikosti 100 N. Zanedbejte působení tíhového pole Země a určete:

a/ Tlak, který tato síla vyvolá v kapalině.

b/ Velikost tlakové síly působící na větší píst.



Obr. 2.6: Schematické znázornění hydraulického zvedáku pro příklad 2 *(3)*.

Dáno: $S_1 = 20\ \text{cm}^2 = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$

$S_2 = 800\ \text{cm}^2 = 8 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^2$ $\qquad p_v = ?$

$F_1 = 100\ \text{N}$ $\qquad F_2 = ?$

a/ Podle vztahu (2.1.1):

$$p_v = \frac{F_1}{S_1} = \frac{100\ \text{N}}{2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2} = 50\ 000\ \text{Pa} = 50\ \text{kPa}$$

b/ Podle Pascalova zákona je tlak v celém objemu kapaliny stejný, takže velikost síly působící na větší píst můžeme vypočítat podle vztahu (2.2.1)

$$F_2 = p_v \cdot S_2 = 50\ 000\ \text{Pa} \cdot 8 \cdot 10^{-2} = 4000\ \text{N}$$

Odpovědi:

a/ Síla o velikosti 100 N působící na menší píst vyvolá v kapalině tlak 50 kPa.

b/ Na větší píst působí tlaková síla o velikosti 4000 N.

2.2.2 Hydrostatický tlak

Hydrostatický tlak (bude označován p_h) je vyvolán vlastní tíhou kapaliny. Vzorec pro jeho velikost můžeme odvodit ze vztahu (2.1.1), když za sílu (F) dosadíme tíhu kapaliny (G), tedy:

$$p_h = \frac{G}{S} \qquad (2.2.3).$$

Tíhu můžeme vyjádřit jako součin hmotnosti a tíhového zrychlení ($G = m \cdot g$) a dosadit:

$$p_h = \frac{m \cdot g}{S} \qquad (2.2.4).$$

Hmotnost můžeme rozepsat jako součin hustoty a objemu ($m = \rho \cdot V$) a dále zde objem kapaliny jako součin vodorovné plochy a výšky kapalinového sloupce nad touto plochou, nebo-li hloubky této plochy ($m = \rho \cdot S \cdot h$). Když tento výraz dosadíme do (2.1.6), dostaneme:

$$p_h = \frac{\rho \cdot S \cdot h \cdot g}{S} \qquad (2.2.5)$$

a po vykrácení S obdržíme vzorec pro **hydrostatický tlak** v obvyklém tvaru:

$$\mathbf{p_h = \rho \cdot g \cdot h} \qquad (2.2.6).$$

Na rozdíl od vnějšího tlaku, není hydrostatický tlak v celém objemu stejný, ale podle vzorce (2.1.8) lineárně roste s hloubkou.

Hydrostatický tlak lze také vyjádřit odpovídající výškou kapalinového sloupce homogenní kapaliny. Vzorec pro tuto tzv. geodetickou výšku (h_g) získáme úpravou vzorce (2.1.8):

$$h_g = \frac{p_h}{\rho \cdot g} \qquad (2.2.7).$$

Poznámka: Velikost tíhového zrychlení, se v různých místech liší. V tomto učebním textu bude používána hodnota $g \approx 9{,}81\ m \cdot s^{-2}$, která přibližně odpovídá podmínkám České republiky.

Př. 3

Vypočtěte velikost hydrostatického tlaku na dně Mariánského příkopu.

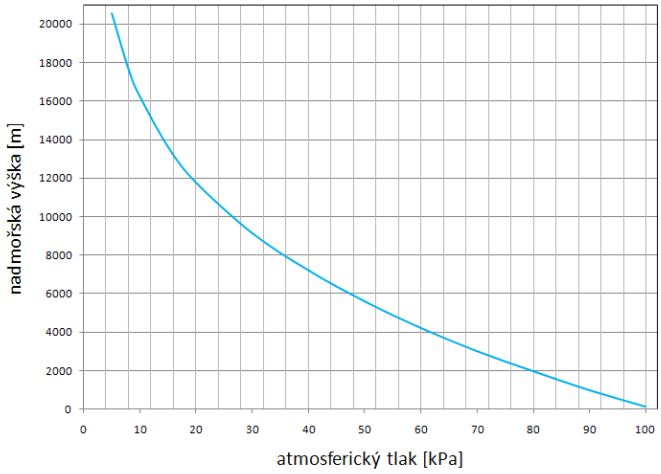
Pro výpočet hydrostatického tlaku použijeme vzorec (2.2.6), kde ρ bude hustota mořské vody (vyhledáme a použijeme průměrnou hodnotu 1026 $kg \cdot m^{-3}$), hodnotu g použijeme podle výše uvedené poznámky a h bude hloubka Mariánského příkopu (pro toto nejhlubší známé místo na Zemi je nejčastěji uváděna maximální hloubka 10 994 m). Tedy:

Dáno: $\rho = 1026\ kg \cdot m^{-3}$
$g = 9{,}81\ m \cdot s^{-2}$
$h = 10\ 994\ m$ $\qquad$ $p_h = ?$

$p_h = \rho \cdot g \cdot h = 1026\ kg \cdot m^{-3} \cdot 9{,}81\ m \cdot s^{-2} \cdot 10\ 994\ m = 110\ 655\ 270\ Pa \approx 111\ MPa$

Odpověď: Velikost hydrostatického tlaku na dně Mariánského příkopu je přibližně 111 MPa.

Úkol k zamyšlení: Na obrázku 2.7 je diagram závislosti atmosférického tlaku vzduchu, tedy tlaku vyvozeného tíhou vzdušného obalu Země, v závislosti na nadmořské výšce. Proč tato závislost není podle vztahu (2.2.6) lineární?



Obr. 2.7: Závislost atmosférického tlaku na nadmořské výšce *(4)*.

Řešení: Závislost tlaku vzduchu na nadmořské výšce není lineární, protože hustota vzduchu není konstantní, ale s výškou klesá.

2.2.3 Statický tlak

Statický tlak (bude označován p_s) je souhrnný účinek vnějších sil okolního prostředí na kapalinu a vlastní tíhy kapaliny, je tedy součtem vnějšího tlaku a hydrostatického tlaku:

$$p_s = p_v + p_h \qquad (2.2.8).$$

Př. 4

Jak se změní příklad 1, pokud nebudeme zanedbávat tlak vyvolaný vlastní tíhou kapaliny?

Dáno: viz příklad 1

Pro výpočet tlakových sil opět použijeme vztah (2.2.1):

$$F = p \cdot S,$$

ale tlak bude roven statickému tlaku, tedy součtu vnějšího a hydrostatického tlaku:

$$F_{p1} = p_{s1} \cdot S_1 = (p_v + p_{h1}) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_1^2 = (p_v + \rho \cdot g \cdot h_1) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_1^2 =$$

$$= (20 \cdot 10^6\ \text{Pa} + 1000\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0{,}5\ \text{m}) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0{,}15\ \text{m})^2 =$$

$$= 353516\ \text{N} \approx 353{,}5\ \text{kN}$$

$$F_{p2} = p_{s2} \cdot S_2 = (p_v + p_{h2}) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_2^2 = (p_v + \rho \cdot g \cdot h_2) \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_2^2 = \ldots$$

$$F_{p3} = \ldots$$

Odpověď: Tlaková síla na první víko je 353,5 kN, obdobně dopočtěte tlakovou sílu na druhé a třetí víko.

Když srovnáme hodnotu F_{p1} vypočtenou v příkladu 1 a v příkladu 4, zjistíme, že rozdíl je až na čtvrté platné číslici. Zde je vidět, že při výpočtech hydraulických zařízení můžeme často vlastní tíhu kapaliny (a tedy hydrostatický tlak) zanedbat. Samozřejmě, že to není možné v případě větších kapalinových sloupců – viz příklad 3).

Podobně jako ve vzorci (2.2.7) můžeme pomocí odpovídajících výšek kapalinových sloupců vyjádřit i ostatní taky z rovnice (2.2.8):

$$h_g = \frac{p_h}{\rho \cdot g} \quad \text{(geodetická výška)} \qquad \text{viz (2.2.7);}$$

$$h_s = \frac{p_s}{\rho \cdot g} \quad \text{(statická výška)} \qquad (2.2.9);$$

$$h_p = \frac{p_v}{\rho \cdot g} \quad \text{(tlaková výška)} \qquad (2.2.10).$$

Absolutní tlak (p_{abs}) je vždy kladný, nemůže být záporný.

Přetlak ($p_{př}$) je rozdíl absolutního tlaku a tlaku atmosférického (pokud je absolutní tlak vyšší než atmosférický). Pokud měříme tlakoměrem například tlak v pneumatikách, neměříme absolutní tlak, ale přetlak (naopak barometry k měření atmosférického tlaku měří absolutní tlak).

$$p_{př} = p_{abs} - p_b \qquad (2.2.11).$$

Podtlak (p_{po}) je rozdíl mezi atmosférickým tlakem a tlakem absolutním (pokud je absolutní tlak nižší než atmosférický).

$$P_{po} = p_b - p_{abs} \qquad (2.2.12).$$

Při výpočtech je potřeba vždy dát pozor, zda se jedná o absolutní tlak, přetlak či podtlak, přičemž zvyklosti při používání těchto pojmů v zahraničí jsou jiné než zvyklosti v České republice.

Normální tlak (p_n) – protože je atmosférický tlak závislý na nadmořské výšce, teplotě, hustotě atmosféry atd., byl pro snazší porovnání jednotlivých výsledků zaveden tzv. normální atmosférický tlak, jehož hodnota byla stanovena na p_n = 101 325 Pa = 1 atm.

2.3 ROVNOVÁHA NA ROZHRANÍ TEKUTIN

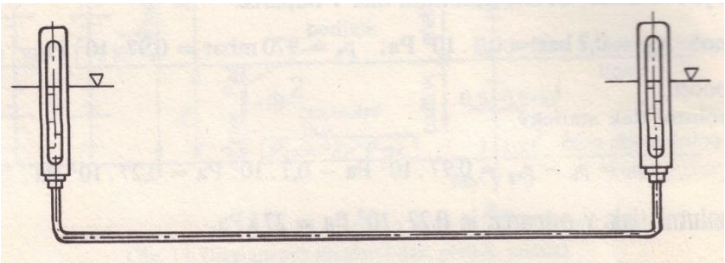
Stýkají-li se dvě nemísící se tekutiny, jsou v rovnováze tehdy, jestliže je dělící hladina na rozhraní tekutin v klidu.

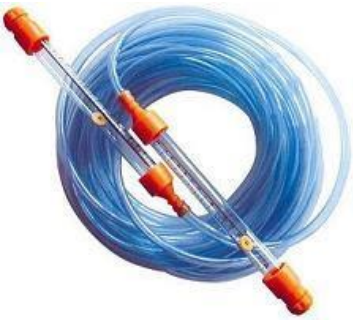
2.3.1 Spojité nádoby s jednou kapalinou

Působí-li na hladiny ve spojitých nádobách stejný tlak, jsou při statické rovnováze hladiny ve stejné výšce.

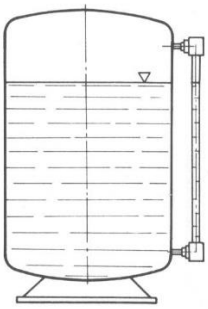
Obr. 2.8: Spojité nádoby *(5)*.

Tohoto jevu se v praxi využívá například ke zjištění vodorovné roviny pomocí hadicové vodováhy nebo ke sledování výšky hladiny v neprůhledných nádobách pomocí vodoznaku.



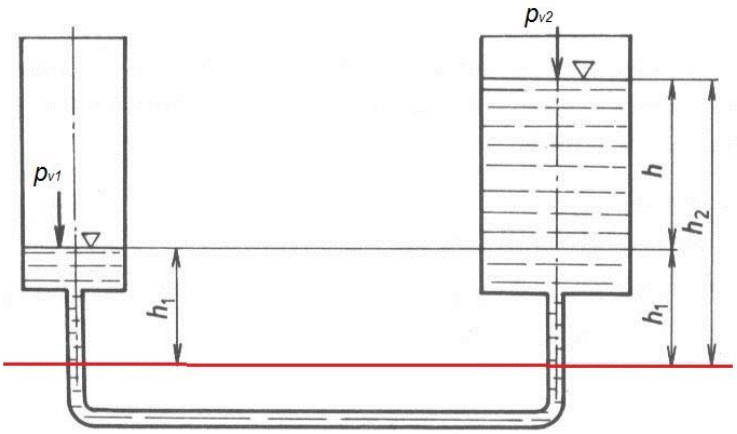


Obr. 2.9: Hadicová vodováha – princip *(1)* a příklad *(6)*.



Obr. 2.10: Vodoznak – princip (*1)*, vodoznak pro ocelové nádoby *(7)*, rychlovarná konvice s vodoznakem *(8)*.

Působí-li na hladiny ve spojitých nádobách různé vnější tlaky, bude níže ta hladina, na kterou působí větší vnější tlak.



Obr. 2.11: Spojité nádoby s jednou kapalinou a různými vnějšími tlaky ($p_{v1} > p_{v2}$) *(1)*.

Pro srovnávací hladinovou plochu platí rovnováha tlaků – celkový tlak (v hydrostatice statický tlak) k hladinové ploše v jedné nádobě je roven celkovému (statickému) tlaku ke stejné hladinové ploše ve druhé nádobě:

$$p_{s1} = p_{s2} \qquad (2.3.1).$$

Pokud rozepíšeme statický tlak na vnější a hydrostatický, pak k vybrané hladinové ploše platí:

$$p_{v1} + p_{h1} = p_{v2} + p_{h2} \qquad (2.3.2)$$

a dosadíme-li za hydrostatický tlak podle vztahu (2.2.6), pak k hladinové ploše vyznačené na obr. 2.11 červeně platí:

$$p_{v1} + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_{v2} + \rho \cdot g \cdot h_2 \qquad (2.3.3),$$

kde h_1 a h_2 jsou výšky hladin podle obr. 2.11.

Př. 5

Vypočtěte rozdíl výšek hladin ve spojitých nádobách obsahujících olivový olej o hustotě 910 kg·m^{-3} podle obrázku 2.11, když na levou hladinu působí vnější tlak 103 kPa a na pravou nádobu 100 kPa.

Dáno: $\rho = 910\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$

$p_{v1} = 103\ \text{kPa} = 103\ 000\ \text{Pa}$

$p_{v2} = 100\ \text{kPa} = 100\ 000\ \text{Pa}$ $\qquad$ $h = ?$

Pro výpočet sestavíme rovnici rovnováhy tlaků k vytčené hladinové ploše podle vztahů (2.3.1) až (2.2.3) a následně můžeme matematickou úpravou získat ze vztahu (2.3.3) vztah pro rozdíl výšek hladin h mezi levou a pravou spojitou nádobou na obr. 2.11:

$$h = h_2 - h_1 = \frac{p_{v1} - p_{v2}}{\rho \cdot g}$$

a po dosazení

$$h = \frac{103\,000\ \text{Pa} - 100\,000\ \text{Pa}}{910\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = 0{,}336\ \text{m}$$

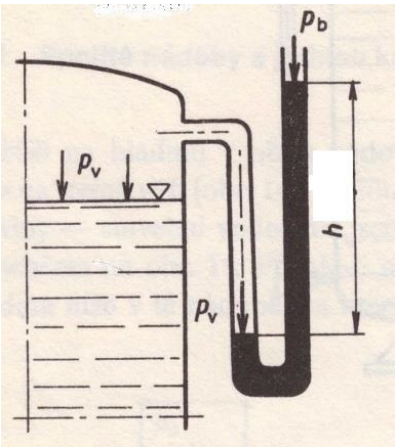
Odpověď: Rozdíl výšek hladin je 0,336 m.

Př. 6

Pomocí skleněné trubice se rtutí ve tvaru U byl měřen tlak v nádobě (podle obrázku). Hustota rtuti je 13 600 kg·m^{-3}, atmosférický tlak byl 980 kPa, rozdíl hladin rtuti byl změřen 400 mm. Určete:

a/ přetlak v nádobě;

b/ absolutní vnější tlak v nádobě.



Obr. 2.12: Schematické znázornění příkladu 6 *(1)*.

Dáno: ρ = 13 600 kg·m^{-3}

p_b = 98 kPa = 98 000 Pa

h = 400 mm = 0,4 m

a/ $p_{př}$ = ?

b/ p_v = ?

a/ Rozdíl výšek hladin v U-trubici je dán rozdílem tlaků působících na její hladiny. Na pravou hladinu působí „pouze“ atmosférický tlak p_b, na levou hladinu absolutní vnější tlak $p_v = p_b + p_{př}$. Rozdíl tlaků v pravé a levé nádobě je tedy roven přetlaku $p_{př}$, který „vyvažuje“ hydrostatický tlak sloupce rtuti o výšce h, tedy:

$p_{př} = \rho \cdot g \cdot h$ = 13 600 kg·m^{-3} · 9,81 m·s^{-2} · 0,4 m = 53 366 Pa

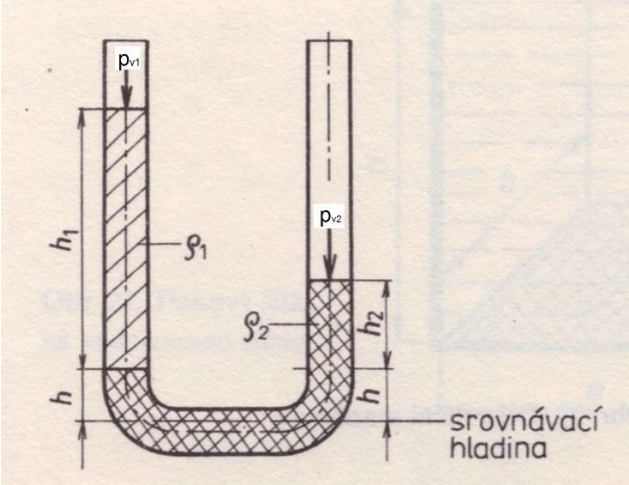
b/ $p_v = p_b + p_{př}$ = 98 000 Pa + 53 366 Pa = 151 366 Pa

Odpovědi:

a/ Přetlak v nádobě byl 53 366 Pa.

b/ V nádobě byl absolutní vnější tlak 151 366 Pa.

2.3.2 Spojité nádoby obsahující nemísící se kapaliny



Obr. 2.13: Spojité nádoby obsahující dvě nemísící se kapaliny *(upraveno podle 1).*

Při výpočtech se opět postupuje podle stejného principu jako v předchozí kapitole 2.2.1, tedy, tedy **pro srovnávací hladinu platí rovnováha tlaků** – statický tlak k hladinové ploše v jedné nádobě je roven statickému tlaku ke stejné hladinové ploše ve druhé nádobě:

$p_{s1} = p_{s2}$ (viz 2.3.1).

Opět můžeme rozepsat statický tlak na součet vnějšího a hydrostatického:

$p_{v1} + p_{h1} = p_{v2} + p_{h2}$ (viz 2.3.2)

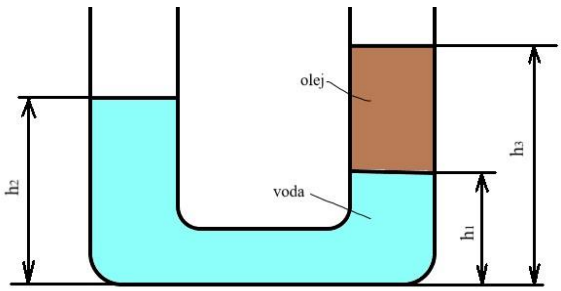
a opět dosadíme za hydrostatický tlak podle vztahu (2.2.6). Pokud ale budeme popisovat situaci na obr. 2.13, jsou v levé nádobě dvě kapaliny o různých hustotách, a tedy dvě složky hydrostatického tlaku, které odpovídají sloupcům kapaliny o hustotách ρ_1 a ρ_2. V pravé nádobě je jen jedna kapalina a tedy jen jedna složka hydrostatického tlaku. K vyznačené srovnávací hladině platí:

$p_{v1} + \rho \cdot g \cdot h_1 + \rho_2 \cdot g \cdot h = p_{v2} + \rho_2 \cdot g \cdot (h + h_2)$ (2.3.4).

Podle stejného principu by se postupovalo, kdyby nádoby obsahovaly více sloupců nemísících se kapalin (tedy jednotlivé kapalinové sloupce vyvolávají jednotlivé složky hydrostatického tlaku).

Př. 7

Ve spojité otevřené nádobě podle obrázku je voda a olej. Určete hustotu oleje.



Obr. 2.14: Schematické znázornění příkladu 7.

Dáno: $\rho_{voda} = 1000\ kg \cdot m^{-3}$

$h_1 = 100\ mm = 0{,}1\ m$

$h_2 = 200\ mm = 0{,}2\ m$

$h_3 = 250\ mm = 0{,}25\ m$ $\rho_{olej} = ?$

Podle vztahu 2.2.2 sestavíme rovnici rovnováhy tlaků (jako srovnávací hladinu zvolíme dno nádoby). Protože se jedná o otevřené nádoby, je vnější tlak roven atmosférickému:

$$p_b + \rho_{vody} \cdot g \cdot h_2 = p_b + \rho_{vody} \cdot g \cdot h_1 + \rho_{olej} \cdot g \cdot (h_3 - h_1).$$

Na obou stranách rovnice odečteme p_b a následně rovnici vydělíme g:

$$\rho_{vody} \cdot h_2 = \rho_{vody} \cdot h_1 + \rho_{olej} \cdot (h_3 - h_1).$$

Po úpravě

$$\rho_{olej} = \rho_{voda} \cdot \frac{h_2 - h_1}{h_3 - h_1}$$

a po dosazení

$$\rho_{olej} = 1000\ kg \cdot m^{-3} \cdot \frac{0{,}2\,m - 0{,}1\,m}{0{,}25\,m - 0{,}1\,m} \approx 666{,}7\ kg \cdot m^{-3}$$

Odpověď: Hustota oleje je $666{,}7\ kg \cdot m^{-3}$.

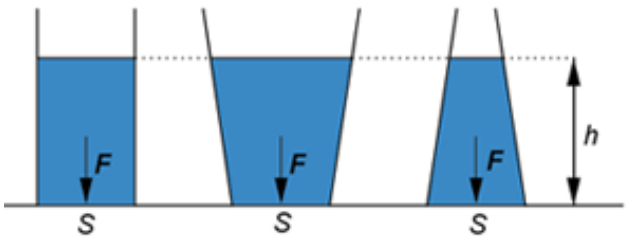
2.4 TLAKOVÁ SÍLA NA PONOŘENOU VODOROVNOU STĚNU

Tlaková síla (F) je dána vztahem (2.2.1). Pokud určujeme tlakovou sílu pod volnou hladinou, působí na volnou hladinu i na všechny vnější strany stěn nádob atmosférický tlak a namáhání stěn tlakovou silou je způsobeno pouze přetlakem odpovídajícím hydrostatickému tlaku kapaliny v nádobě (p_h), tedy:

$$F = p_h \cdot S = \rho \cdot g \cdot h \cdot S \qquad (2.4.1),$$

kde ρ je hustota kapaliny, g je tíhové zrychlení, h je hloubka ponořené vodorovné stěny a S je plocha vodorovné ponořené stěny (například plocha dna nádoby).

Uvažujeme-li otevřené nádoby se stejnými plochami dna a se stejnou hloubkou stejné kapaliny, jako na obr. 2.15, bude tlaková síla na dna těchto nádob stejná, protože podle vztahu 2.4.1 závisí na ploše dna, hloubce, hustotě a tíhovém zrychlení; nezávisí tedy na objemu kapaliny v nádobě. Tomuto jevu se říká **hydrostatický paradox**.



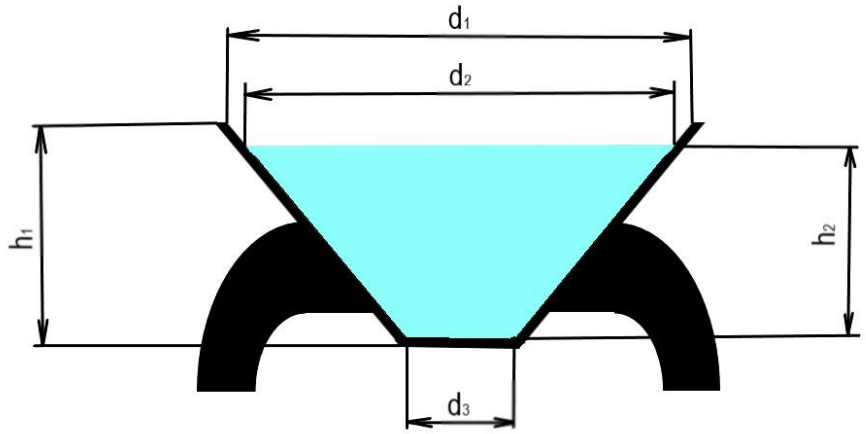
Obr. 2.15: Hydrostatický paradox *(9)*.

Tlaková síla na vodorovné dno je (podle vztahu 2.4.1) rovna tíze kapaliny nad plochou dna a působí v těžišti objemu této kapaliny. Toto platí i pro dno, které není vodorovné.

Pokud máme řešit tlakovou sílu na jakoukoli (obecnou) ponořenou stěnu, vždy je dána součinem velikosti plochy stěny a tlaku na ni působící (viz vzorec 2.2.1), ale pozor - na jiné než vodorovné stěny není hydrostatický tlak konstantní, čímž se výpočet komplikuje (podrobněji viz např. *(1)*).

Př. 8

Určete, jakou tlakovou silou je namáháno vodorovné dno otevřené nádoby tvaru komolého kužele, v níž je etanol o hustotě 789 kg·m^{-3}.



Obr. 2.16: Schematické znázornění příkladu 8.

Dáno: ρ = 789 kg·m^{-3}
h_1 = 1500 mm = 1,5 m
h_2 = 1200 mm = 1,2 m
d_1 = 3300 mm = 3,3 m
d_2 = 3100 mm = 3,1 m
d_3 = 800 mm = 0,8 m F = ?

Pro výpočet tlakové síly na vodorovné dno vyžijeme vztah 2.4.1, kde hloubka dna je h_2 a plocha kruhového dna $S = \frac{\pi}{4} \cdot d_3^2$, tedy:

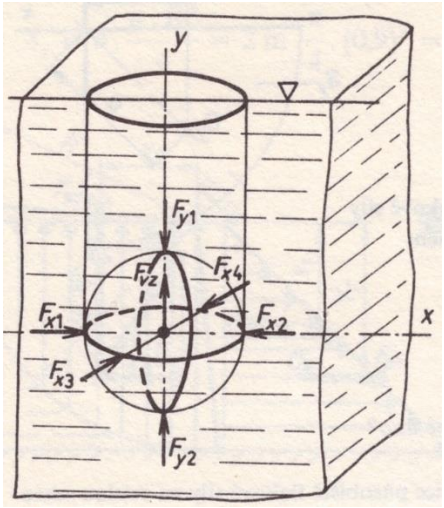
$$F = \rho \cdot g \cdot h_2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_3^2 = 789\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \cdot 1{,}2\,\mathrm{m} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0{,}8\,\mathrm{m})^2 = 4668{,}7\,\mathrm{N}.$$

Odpověď: Tlaková síla na vodorovné dno nádoby je 4668,7 N.

2.5 PLOVÁNÍ TĚLES

Archimédův zákon: Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno vztlakovou silou, rovnající se tíze kapaliny tělesem vytlačené. Působiště vztlakové síly je v těžišti objemu vytlačené kapaliny.

Archimédův zákon můžeme odvodit na příkladu koule ponořené do kapaliny (viz obr. 2.17).



Obr. 2.17: Síly působící na kouli ponořenou do kapaliny *(1)*.

Tlakové síly působí na kouli ze všech stran. Síly působící ve vodorovném směru jsou evidentně stejně velké a jejich účinek se navzájem vyruší:

$$F_x = \sum F_{xi} = 0 \qquad (2.5.1).$$

Síly působící shora na horní polovinu koule odpovídají (podle toho, co bylo uvedeno v předchozí kapitole) tíze kapaliny nad horní polovinou koule (viz obr. 2.18):

$$F_{y1} = G_1 = V_1 \cdot \rho \cdot g \qquad (2.5.2).$$

Síly působící zdola na dolní polovinu koule odpovídají pomyslné tíze kapaliny nad dolní polovinou koule:

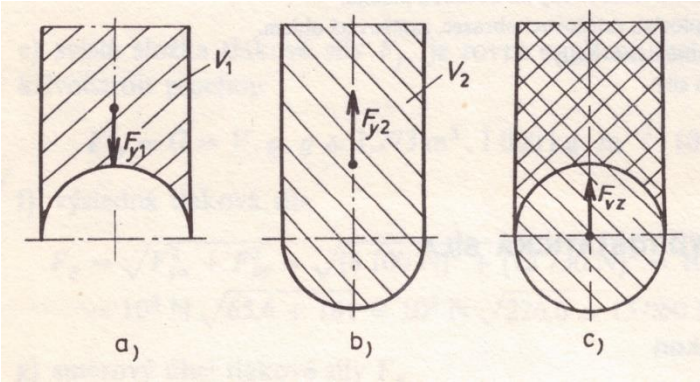
$$F_{y2} = G_2 = V_2 \cdot \rho \cdot g \qquad (2.5.3).$$

Výsledná **hydrostatická vztlaková síla F_{vz}** je dána rozdílem sil působících na horní a dolní polovinu koule:

$$F_{vz} = F_{y1} - F_{y2} = (V_1 - V_2) \cdot \rho \cdot g = - V \cdot \rho \cdot g = - G_{kap} \qquad (2.5.4),$$

kde V je objem koule, ρ je hustota kapaliny, G_{kap} je tíha kapaliny tělesem vytlačené.

Poznámka: Archimédův zákon platí i pro vzdušiny, ale aerostatická vztlaková síla je mnohem menší vhledem k malé hustotě vzdušin.



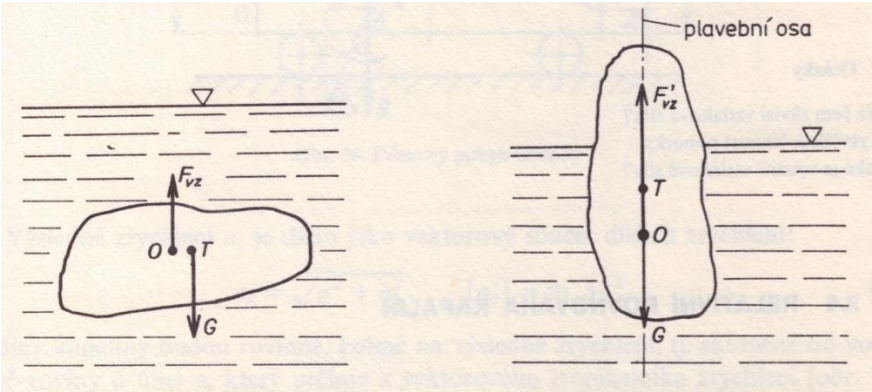
Obr. 2.18: Zatěžovací objemy ponořené koule; a/ objem kapaliny nad horní polovinou koule; b/ pomyslný objem kapaliny nad dolní polovinou koule; c/ rozdíl objemů V_1 a V_2 je roven objemu koule *(1)*.

Ponoříme-li obecné těleso do kapaliny, působí na ně dvě síly v opačném směru. Vztlaková síla F_{vz} podle vztahu (2.5.4) s působištěm v těžišti objemu vytlačené kapaliny směřuje vzhůru **a tíha tělesa G** s působištěm v těžišti tělesa směřuje dolů:

$$G = V \cdot \rho_T \cdot g \qquad (2.5.5),$$

kde ρ_T je hustota tělesa.

Pokud nejsou působiště sil ve stejném bodu (např. když nebí těleso homogenní), moment vzniklý dvojicí těchto sil způsobí natočení tělesa tak, že spojnice těžiště tělesa T a těžiště objemu vytlačené kapaliny O (viz obr. 2.19) leží ve svislém směru. Tato spojnice se nazývá **plavební osa**.



Obr. 2.19: Dvojice sil působící na obecné těleso ponořené do kapaliny a těleso plovoucí na hladině *(1)*.

Ve svislém směru mohou nastat tři případy:

- $G > F_{vz}$ těleso klesá ke dnu;
- $G = F_{vz}$ těleso se volně vznáší v kapalině;
- $G < F_{vz}$ těleso se vynoří nad hladinu. Tím se zmenší objem vytlačené kapaliny a vztlaková síla nadlehčující těleso a ustaví se rovnováha mezi tíhou tělesa a zmenšenou vztlakovou silou F_{vz}':

$$G = F_{vz}' \qquad (2.5.6).$$

Po dosazení:

$V \cdot \rho_T \cdot g = V' \cdot \rho_K \cdot g$ (2.5.7).

A po úpravě:

$$\frac{V'}{V} = \frac{\rho_T}{\rho_K} \quad (2.5.8),$$

kde V' je objem ponořené části tělesa (zmenšený objem vytlačené kapaliny), V je celkový objem tělesa, ρ_T je hustota tělesa a ρ_K je hustota kapaliny.

Př. 9

Na klidné vodní hladině plave kmen stromu ve tvaru válce (průměr má 50 cm, délku má 120 cm). 60 % objemu kmene je pod hladinou. Určete hmotnost tohoto dřevěného kmene.

Dáno: $\rho_{voda} = 1000\ kg \cdot m^{-3}$

$d = 50\ cm = 0{,}5\ m$

$h = 120\ cm = 1{,}2\ m$

$V' = 60\ \%\ V = 0{,}6 \cdot V$ $\qquad$ $m = ?$

Vyjdeme ze známého vztahu pro hmotnost:

$m = \rho \cdot V$ (2.5.9),

kde neznámou hustotu tělesa můžeme vypočítat podle vztahu (2.5.8):

$$\frac{V'}{V} = \frac{\rho_T}{\rho_{voda}} \quad \rightarrow \quad \rho_T = \frac{V'}{V} \cdot \rho_{voda} = \frac{0{,}6 \cdot V}{V} \cdot \rho_{voda} = 0{,}6 \cdot 1000\ kg \cdot m^{-3} = 600\ kg \cdot m^{-3}.$$

Do vztahu (2.5.9) dosadíme vypočtenou hustotu tělesa a objem stanovíme jako objem válce:

$$m = \rho_T \cdot V = \rho_T \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h = 600\ kg \cdot m^{-3} \cdot \frac{\pi \cdot (0{,}5\ m)^2}{4} \cdot 1{,}2\ m = 141{,}37\ kg$$

Odpověď: Hmotnost dřevěného kmene je 141,37 kg.

3 HYDRODYNAMIKA

☞ *hydrodynamika, tlak, rychlost, energie, viskozita, objemový průtok, hmotnostní průtok, hydraulické ztráty, rovnice kontinuity, Bernoulliho rovnice*

CÍL V této kapitole se seznámíte s vybranými kapitolami ze základů hydrodynamiky.

OSNOVA

3.1 ZÁKLADY PROUDĚNÍ
3.2 USTÁLENÝ TOK IDEÁLNÍ KAPALINY
3.3 USTÁLENÝ TOK SKUTEČNÝCH KAPALIN

OPAKUJ

- základy mechaniky na úrovni předchozího bakalářského studia

Hydrodynamika je část hydromechaniky, která se zabývá pohybem kapalin a jejich působením na tuhá tělesa při vzájemném relativním **pohybu**.

Pohyb skutečných kapalin je obecně složitý. Pro snazší vyjádření zákonitostí pohybů kapalin na středoškolské úrovni je popisováno proudění ideální kapaliny. Pro skutečné kapaliny jsou takto odvozené zákony doplňovány korigujícími členy a součiniteli, které jsou obvykle zjištěny experimentálně. Jinou možností je proudění skutečných kapalin počítačově modelovat, ale i zde jsou aplikována zjednodušení umožňující složitou realitu řešit.

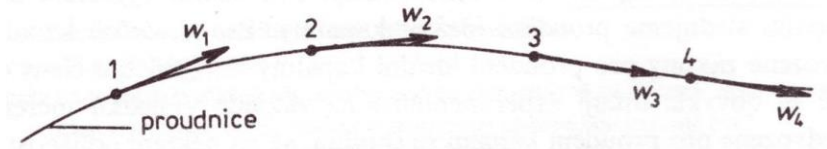
Zákonitosti proudění kapalin se do značné míry shodují se zákonitostmi proudění vzdušin. Rozdíly jsou dány především snadnou stlačitelností vzdušin (a tím jejich proměnlivou hustotou) a dále především jejich menší hustotou a viskozitou.

3.1 ZÁKLADY PROUDĚNÍ

Určující stavové veličiny proudících kapalin jsou **hustota** (ρ), **viskozita** (η, υ), **teplota** (T), **tlak** (p) a **rychlos**t (v, w). Rychlost se v hydrodynamice často označuje w, aby nedocházelo k záměně s měrným objemem; obdobně čas se označuje τ, aby nedocházelo k záměně s teplotou.

U ideální kapaliny považujeme hustotu za konstantní a viskozitu za nulovou. Teplota ovlivňuje zejména viskozitu skutečných kapalin (u vzdušin také hustotu). Při praktických výpočtech považujeme obvykle teplotu kapalin za konstantní a takové proudění nazýváme jako **izotermické**.

Kapalina se skládá z mnoha malých částic (molekul nebo atomů). Proudí-li kapalina, opisují tyto částice dráhy, které se nazývají proudnice (nebo proudové čáry). Okamžitá rychlost částic má směr vždy tečný k proudnici.



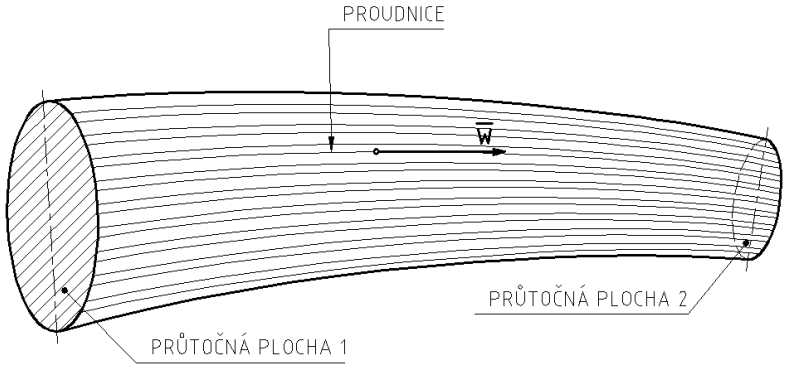
Obr. 3.1: Proudnice *(1)*.

Obecně může být proudění kapalin všemi směry. Pro zjednodušení budeme uvažovat proudění ideální kapaliny podél osy v tzv **proudové trubici**. Takové proudění nazýváme jednorozměrné. Dále budeme předpokládat, že proudová trubice je zcela vyplněna proudnicemi.

Průtočný profil je podle tvaru rovinného řezu kolmého k podélné ose proudové trubice nejčastěji **kruhový**, ale obecně může mít libovolný tvar (čtvercový, obdélníkový, oválný, eliptický atd.).

Průtočná plocha (S) je obsah rovinného řezu kolmého k podélné ose proudové trubice.

Bodová rychlost (w) je okamžitá rychlost kapaliny v daném bodě. Obecně je bodová rychlost v různých bodech průtočné plochy různá. Při sledování proudění ideální kapaliny uvažujeme pro vyřešení zákonitostí proudění tzv. **průřezovou rychlost** (w), která je ve všech bodech dané průtočné plochy stejně velká.



Obr. 3.2: Proudová trubice *(10)*.

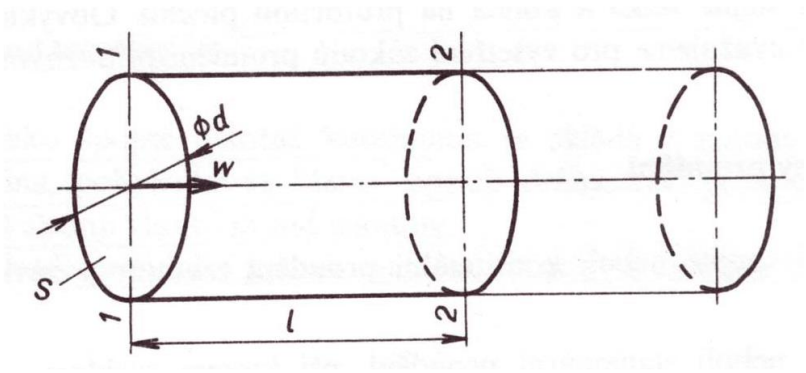
V závislosti na čase rozdělujeme proudění na“

- **stacionární (ustálené) proudění**, při němž jsou v konkrétním bodě rychlost a tlak kapaliny konstantní – nezávisí na čase (to v praxi odpovídá proudění potrubím nebo hadicí při stálém zdroji energie, například s hydrodynamickým čerpadlem);

- **nestacionární (neustálené) proudění**, při němž jsou v konkrétním bodě rychlost a tlak kapaliny proměnné v závislosti na čase (to v praxi odpovídá proudění potrubím nebo hadicí při proměnlivém zdroji energie, například s pístovým čerpadlem).

Sledujeme-li průtok kapaliny proudovou trubicí o konstantní průtočné ploše S průřezovou rychlostí w (viz obr. 3.3), posune se částice kapaliny za čas τ o dráhu l. A protože obecně platí, že rychlost je dráha za čas, můžeme pro rychlost kapaliny napsat:

$$w = \frac{l}{\tau} \qquad (3.1.1).$$



Obr. 3.3: Proudění kapaliny proudovou trubicí s konstantní průtokovou plochou *(1)*.

<u>Objemový průtok</u> (Q_V) je definován jako objem tekutiny, který proteče průtočnou plochou za určitý čas, tedy:

$$Q_V = \frac{V}{\tau} \qquad (3.1.2).$$

Z obr. 3.3 je patrné, že objem, který proteče průtočnou plochou je roven V = S · l, a pokud toto dosadíme do rovnice (3.1.2) a upravíme podle rovnice (3.1.1):

$$Q_V = \frac{V}{\tau} = \frac{S \cdot l}{\tau} = S \cdot w \qquad (3.1.3),$$

kde Q_V – objemový průtok [$m^3 \cdot s^{-1}$], V – objem [m^3], τ – čas [s], S – průtočná plocha [m^2], l – dráha [m], w – průřezová rychlost [$m \cdot s^{-1}$].

<u>Hmotnostní průtok</u> (Q_m) je definován jako hmotnost tekutiny, který proteče průtočnou plochou za určitý čas, tedy:

$$Q_m = \frac{m}{\tau} \qquad (3.1.4).$$

Pokud dosadíme za m = V · ρ, a dále upravujeme podle vztahů (3.1.2) a (3.1.3), můžeme napsat:

$$Q_m = \frac{m}{\tau} = \frac{V \cdot \rho}{\tau} = Q_v \cdot \rho = S \cdot w \cdot \rho \qquad (3.1.5),$$

kde Q_m – hmotnostní průtok [$kg \cdot s^{-1}$], m – hmotnost [kg], τ – čas [s], V – objem [m^3], ρ – hustota [$kg \cdot m^{-3}$], Q_V – objemový průtok [$m^3 \cdot s^{-1}$], S – průtočná plocha [m^2], w – průřezová rychlost [$m \cdot s^{-1}$].

Př. 10

Nádrž o objemu 5000 m^3 oleje o hustotě 800 kg · m^{-3} je třeba vyčerpat za 10 hodin. Jaký musí být minimální objemový průtok čerpadla?

Dáno: $V = 5000\ m^3$

$\rho_{olej} = 800\ kg \cdot m^{-3}$

$\tau = 10$ hodin = 36 000 s $\qquad Q_V = ?$

Dosadíme do vztahu (3.1.2) a vypočteme:

$$Q_V = \frac{V}{\tau} = \frac{5\,000\ m^3}{36\,000\ s} = 0{,}1389\ m^3 \cdot s^{-1}$$

Odpověď: Objemový průtok musí být minimálně 0,1389 $m^3 \cdot s^{-1}$.

Př. 11

Za jak dlouho se za podmínek uvedených v příkladu 10 vyčerpá 1 tuna oleje?

Dáno: $V = 5000\ m^3$

$\rho_{olej} = 800\ kg \cdot m^{-3}$

$Q_V = 0{,}1389\ m^3 \cdot s^{-1}$

$m = 1$ tuna = 1000 kg $\qquad \tau = ?$

Nejprve ze vztahu (3.1.4) vyjádříme čas τ:

$$\tau = \frac{m}{Q_m}.$$

Nyní podle vztahu (3.1.5) dosadíme za $Q_m = Q_V \cdot \rho$, následně dosadíme zadané číselné hodnoty a vypočteme:

$$\tau = \frac{m}{Q_m} = \frac{m}{Q_V \cdot \rho_{olej}} = \frac{1000\ kg}{0{,}1389\ m^3 \cdot s^{-1} \cdot 800\ kg \cdot m^{-3}} = 9\ s$$

Odpověď: Za uvedených podmínek se 1 tuna oleje vyčerpá za 9 s.

3.2 USTÁLENÝ TOK IDEÁLNÍ KAPALINY

Ustálený tok ideální kapaliny se řídí dvěma rovnicemi, které vyjadřují dva základní fyzikální zákony:

- **rovnice kontinuity (spojitosti toku)** vyjadřuje **zákon zachování hmotnosti**;
- **Bernoulliova (pohybová) rovnice** vyjadřuje **zákon zachování energie**.

3.2.1 Rovnice kontinuity

Pokud při prodění ideální kapaliny na obr. 3.2 předpokládáme, že prostor ohraničený proudovou trubicí je zcela zaplněn proudící kapalinou a plášť proudové trubice je nepropustný, potom ze zákona o zachování hmotnosti plyne, že **hmotnostní průtok vtékající do trubice průtočnou plochou 1 je stejný, jako hmotnostní průtok z ní vytékající průtočnou plochou 2, a je stejný, jako hmotnostní průtok protékající každou průtočnou plochou této proudové trubice**, tedy:

$$\mathbf{Q_{m1} = Q_{m2}} = \text{konst.} \qquad (3.2.1).$$

Po dosazení za hmotnostní tok $Q_m = S \cdot w \cdot \rho$ podle rovnice (3.1.5) dostáváme **rovnici kontinuity (spojitosti toku)** vyjadřující průtok tekutiny proudovou trubicí:

$$\mathbf{S_1 \cdot w_1 \cdot \rho_1 = S_2 \cdot w_2 \cdot \rho_2} = \text{konst.} \qquad (3.2.2).$$

Pro ideální nestlačitelnou kapalinu platí $\rho_1 = \rho_2$ a hustotu můžeme z rovnice vykrátit, tedy:

$$\mathbf{S_1 \cdot w_1 = S_2 \cdot w_2} = \text{konst.} \qquad (3.2.3),$$

a dostáváme **rovnici kontinuity pro nestlačitelné tekutiny**. Z rovnice (3.1.3) vyplývá, že $S \cdot w = Q_v$, tedy:

$$\mathbf{Q_{V1} = Q_{V2}} = \text{konst.} \qquad (3.2.4),$$

neboli - **pro nestlačitelné tekutiny (ideální kapalinu) také platí, že objemový průtok je v každém průřezu proudové trubice stejný.**

Pro nejčastější průtočný profil, tady kruhový, můžeme do rovnice (3.2.3) za S dosadit vztah pro výpočet plochy kruhu z průměru d:

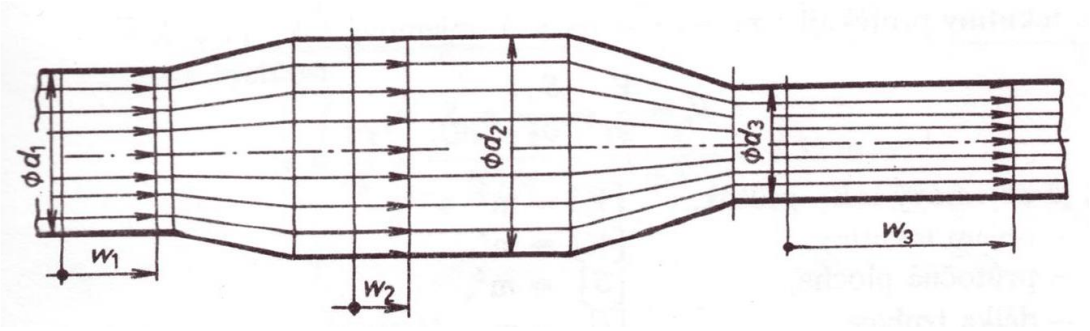
$$\frac{\pi}{4} \cdot d_1^2 \cdot w_1 = \frac{\pi}{4} \cdot d_2^2 \cdot w_2 \qquad (3.2.5)$$

a po úpravě získáme tvar rovnice kontinuity pro proudění ideální kapaliny trubicí kruhového průřezu:

$$d_1^2 \cdot w_1 = d_2^2 \cdot w_2 \qquad (3.2.6).$$

Z rovnice kontinuity (spojitosti toku) vyplývá, že:

- při ustáleném toku tekutiny celistvou trubicí je hmotnostní průtok v každém průřezu trubice stejný;
- při ustáleném toku nestlačitelné tekutiny celistvou trubicí je také objemový průtok v každém průřezu trubice stejný;
- v zúženém průřezu proudí tekutina vyšší rychlostí (a naopak);
- pokud proudí kapalina v trubici kruhového průřezu, její rychlost roste nebo klesá s druhou mocninou průměru (pokud se například její průměr zmenší dvakrát, rychlost vzroste čtyřikrát).



Obr. 3.4: Rychlost proudění kapaliny proudovou trubicí o proměnném průměru *(1)*.

Př. 12

Potrubím kruhového průřezu se změnami průměru podle obr. 3.4 stacionárně proudí voda o hustotě 1000 kg·m^3. Známé jsou vnitřní průměry potrubí d_1 = 60 mm a d_3 = 40 mm a průřezová rychlost v prvním průřezu w_1 = 0,8 m·s^{-1}. Vypočtěte hmotnostní průtok a průřezovou rychlost ve třetím průřezu (vodu považujte za nestlačitelnou, ztráty zanedbejte).

Dáno: ρ_{voda} = 1000 kg·m^{-3}

w_1 = 0,8 m·s^{-1}

d_1 = 60 mm = 0,06 m $\qquad$ Q_m = ?

d_3 = 40 mm = 0,04 m $\qquad$ w_3 = ?

Hmotnostní průtok má podle rovnice kontinuity stejnou velikost ve všech průřezech proudové trubice. Vypočteme ho ze zadaných hodnot v prvním průřezu podle vztahu (3.1.5), kam za S dosadíme plochu kruhu:

$$Q_{m1} = S_1 \cdot w_1 \cdot \rho_{voda} = \frac{\pi}{4} \cdot d_1^2 \cdot w_1 \cdot \rho_{voda} = \frac{\pi}{4} \cdot (0{,}06\ \mathrm{m})^2 \cdot 0{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot 1000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$$

$$Q_{m1} = 2{,}26\ \mathrm{kg \cdot s^{-1}}$$

Průřezovou rychlost vypočteme ze vztahu (3.2.6):

$$d_1^2 \cdot w_1 = d_3^2 \cdot w_3,$$

ze kterého vyjádříme neznámou průřezovou rychlost w_3 a dosadíme číselné hodnoty:

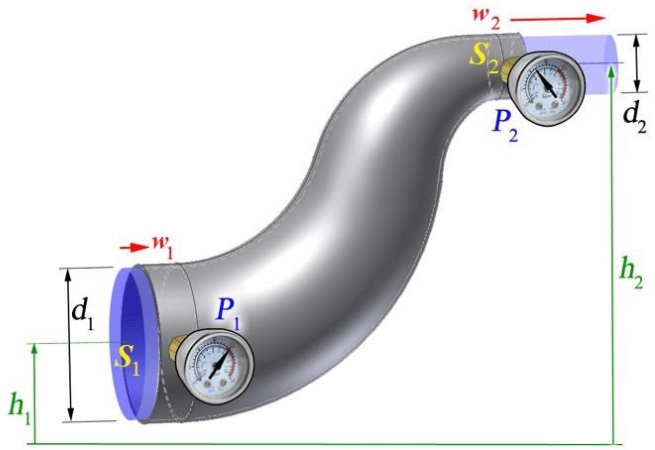
$$w_3 = \frac{d_1^2}{d_3^2} \cdot w_1 = \frac{(0{,}06\ \mathrm{m})^2}{(0{,}04\ \mathrm{m})^2} \cdot 0{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 1{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Odpověď: Hmotnostní průtok v daném potrubí je 2,26 kg ·s^{-1} a průřezová rychlost ve třetím průřezu je 1,8 m · s^{-1}.

3.2.2 Bernoulliova (pohybová) rovnice

Bernoulliova (pohybová) rovnice vyjadřuje zákon zachování energie - energie nemůže vznikat ani zanikat, pouze dochází ke vzájemné transformaci jejích forem. Pro proudění ideální tekutiny neprostupnou trubicí tedy platí, že celková energie (E_c) tekutiny v průtočné ploše 1 je stejně velká jako celková energie v průtočné ploše 2 (a je stejně velká jako celková energie tekutiny v každé průtočné ploše této proudové trubice), neboli:

$$\mathbf{E_{c1} = E_{c2}} = \text{konst.} \qquad (3.2.7).$$



Obr. 3.5: Proudění kapaliny proudovou trubicí se změnou výšky a průměru *(upraveno podle 11)*.

Nyní můžeme uvažovat, k transformaci kterých forem energie při proudění ideální tekutiny může docházet. Ve specifických případech můžeme uvažovat o vzájemných transformacích elektrické energie, magnetické energie, chemické energie, jaderné energie apod., ale obvykle můžeme vzájemné transformace těchto forem energie při proudění ideálních tekutin zanedbat. Při izotermickém proudění ideální kapaliny zanedbáme i transformace tepelné energie. Z toho vyplývá, že při izotermickém proudění **uvažujeme pouze vzájemné transformace forem mechanické energie** (E_m) , neboli:

$$\mathbf{E_{m1} = E_{m2}} = \text{konst.} \qquad (3.2.8).$$

Mechanická energie je dána součtem potenciální (polohové) energie (E_{pt}) a kinetické (pohybové) energie (E_k):

$$E_m = E_{pt} + E_k \qquad (3.2.9).$$

Potenciální energie se skládá z gravitační potenciální energie (E_g) a tlakové potenciální energie (E_p) (a dále z potenciální energie pružnosti, ale ta má význam u pružně deformovaných těles, takže ji u proudění tekutin ignorujeme):

$$E_{pt} = E_g + E_p \qquad (3.2.10),$$

takže po dosazení do vztahu (3.2.9) dostáváme jednotlivé složky mechanické energie, jejichž vzájemné transformace budeme při proudění ideální tekutiny uvažovat:

$$\mathbf{E_m = E_g + E_p + E_k} \qquad (3.2.11).$$

Gravitační potenciální energie (E_g) je dána v gravitačním poli součinem hmotnosti (m), tíhového zrychlení (g) a výšky (h):

$$E_g = m \cdot g \cdot h \qquad (3.2.12).$$

Tlaková potenciální energie (E_p) je dána podle vztahu (2.2.2) součinem tlaku (p) a objemu (V), přičemž za objem můžeme podle vztahu (2.5.9) dosadit podíl hmotnosti (m) a hustoty (ρ):

$$E_p = V \cdot p = \frac{m}{\rho} \cdot p \qquad (3.2.13).$$

Kinetická energie (E_k) závisí na hmotnosti (m) a rychlosti (w) podle vztahu:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot w^2 \qquad (3.2.14).$$

Po dosazení vztahů (3.2.12 až 14) do vztahu (3.2.11) a následně do vztahu (3.2.8) dostáváme **Bernoulliovu (pohybovou) rovnici pro průtok ideální kapaliny o hmotnosti m:**

$$\boxed{m \cdot g \cdot h_1 + \frac{m}{\rho} \cdot p_1 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot w_1^2 = m \cdot g \cdot h_2 + \frac{m}{\rho} \cdot p_2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot w_2^2 = \text{konst.}} \qquad (3.2.15),$$

kde jednotlivé sčítance představují jednotlivé složky mechanické energie, jejichž velikosti se při proudění ideální kapaliny proudovou trubicí můžou navzájem měnit, ale jejich součet zůstává ve všech průřezech trubice konstantní, tedy:

$$E_{g1} + E_{p1} + E_{k1} = E_{g2} + E_{p2} + E_{k2} = \text{konst.} \qquad (3.2.16).$$

Pokud rovnici (3.2.15) vykrátíme hmotností m, dostáváme **Bernoulliovu (pohybovou) rovnici pro průtok 1 kg ideální kapaliny:**

$$\boxed{g \cdot h_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = g \cdot h_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} = \text{konst.}} \qquad (3.2.17),$$

kde jednotlivé sčítance představují jednotlivé složky mechanické energie 1 kg hmoty, tj. jednotlivé složky **měrné energie**, postupně tedy měrnou gravitační potenciální energii (e_g), měrnou tlakovou potenciální energii (e_p) a měrnou kinetickou energii (e_k):

$$e_{g1} + e_{p1} + e_{k1} = e_{g2} + e_{p2} + e_{k2} = \text{konst.} \qquad (3.2.18).$$

Jednotkou měrné energie je [$J \cdot kg^{-1}$]. Podle zákona zachování energie opět jednotlivé složky měrné energie mohou vzájemně měnit velikost, ale její celkový součet (e_c) zůstává konstantní:

$$e_1 = e_2 = \text{konst.} \qquad (3.2.19).$$

Pokud rovnici (3.2.17) roznásobíme hustotou ρ, dostáváme **Bernoulliovu (pohybovou) rovnici pro průtok 1 m^3 ideální kapaliny v tzv. tlakovém tvaru:**

$$\boxed{\rho \cdot g \cdot h_1 + p_1 + \rho \cdot \frac{w_1^2}{2} = \rho \cdot g \cdot h_2 + p_2 + \rho \cdot \frac{w_2^2}{2} = \text{konst.}} \qquad (3.2.20),$$

protože jednotlivé sčítance představují postupně hydrostatický tlak (p_h) – viz vztah (2.2.6), vnější tlak (p_v) a dynamický tlak (p_d).

Pokud rovnici (3.2.17) dělíme tíhovým zrychlením g, dostáváme **Bernoulliovu (pohybovou) rovnici pro průtok ideální kapaliny v tzv. výškovém tvaru:**

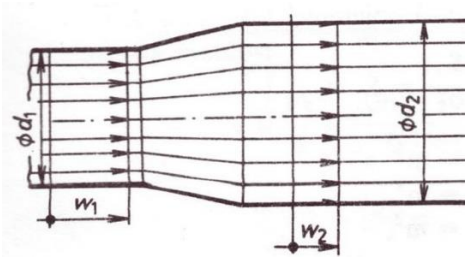
$$h_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{w_1^2}{2 \cdot g} = h_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{w_2^2}{2 \cdot g} \qquad (3.2.21),$$

protože jednotlivé sčítance postupně představují geodetickou výšku (h_g) – viz vztah (2.2.7), tlakovou výšku (h_p) – viz vztah (2.2.10) a rychlostní výšku (h_d). Tento tvar Bernoulliovy rovnice se využívá při výpočtech vodních strojů.

Poznámka: Výše uvedené tvary Bernoulliovy rovnice je možné použít i pro vzdušiny, ale je potřeba počítat se změnami hustoty, tedy nahradit ρ různými hodnotami hustoty v jednotlivých průřezech, tedy ρ_1, ρ_2 atd.

Př. 13

Vodorovným potrubím kruhového průřezu podle obrázku proudí ideální kapalina o hustotě 1200 kg·m^{-3}. Známé hodnoty v užším místě jsou vnitřní průměr d_1 = 60 mm, průřezová rychlost w_1 = 9 m·s^{-1} a tlak p_1 = 250 kPa. Vnitřní průměr v širším místě je d_2 = 90 mm. Vypočítejte tlak v širším místě, ztráty neuvažujte.



Obr. 3.6: Schematické znázornění potrubí se změnou průřezu *(upraveno podle 1).*

Dáno: ρ = 1200 kg·m^{-3}

d_1 = 60 mm = 0,06 m

d_2 = 90 mm = 0,09 m

w_1 = 9 m·s^{-1}

p_1 = 250 kPa = 250 000 Pa $\qquad$ p_2 = ?

K výpočtu tlaku v proudové trubici využijeme Bernoulliovu rovnici – např. ve tvaru měrných energií (3.2.17):

$$g \cdot h_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = g \cdot h_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2}.$$

U vodorovného potrubí se $h_1 = h_2$ (= h) a velikost gravitační potenciální energie se nemění (je na obou stranách rovnice stejně velká) a rovnici můžeme zjednodušit:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} \qquad (3.2.22).$$

V této rovnici jsou dvě neznámé (p_2, w_2), a proto musíme využít další rovnici – rychlost w_2 můžeme vypočítat z rovnice kontinuity, např. ve tvaru (3.2.6):

$$d_1^2 \cdot w_1 = d_2^2 \cdot w_2,$$

odkud po úpravě a dosazení:

$$w_2 = \frac{d_1^2}{d_2^2} \cdot w_1 = \frac{(0{,}06\,\mathrm{m})^2}{(0{,}09\,\mathrm{m})^2} \cdot 9\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 4\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Z rovnice (3.2.22) vyjádříme neznámý tlak p_2, dosadíme a vypočítáme:

$$p_2 = \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} - \frac{w_2^2}{2} \right) \cdot \rho$$

$$p_2 = \left(\frac{250\,000\ \mathrm{Pa}}{1200\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}} + \frac{(9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}})^2}{2} - \frac{(4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}})^2}{2} \right) \cdot 1200\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$$

$$p_2 = 289\,000\ \mathrm{Pa}$$

Odpověď: Tlak v širší části potrubí je 289 kPa.

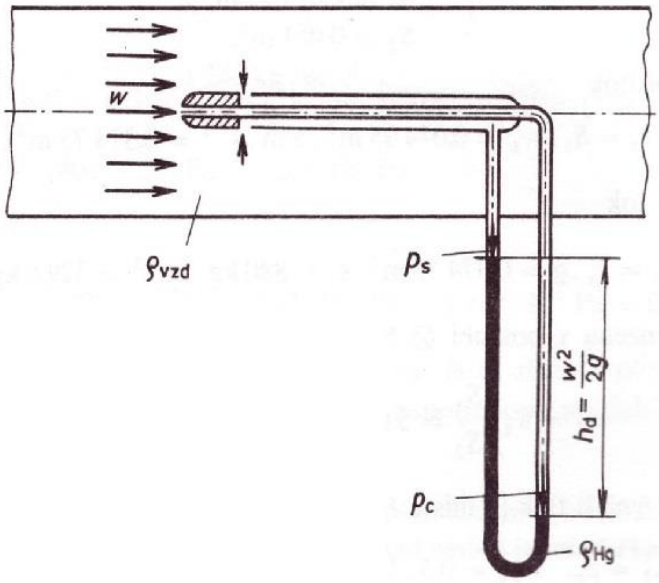
Ze vztahu (3.2.22) a příkladu 13 je patrné, že v užším místě proudové trubice, kde je vyšší rychlost, je nárůst kinetické energie „vyvážen“ poklesem energie tlakové. Skutečnost, že v místě s vyšší rychlostí kapalin je nižší tlak, je nazývána **hydrodynamický paradox**. Obdobou u vzdušin je **aerodynamický paradox**. Snížení tlaku při proudění tekutin se využívá například u rozprašovačů, proudových čerpadel či proudových vývěv.

Obr. 3.7: „Nasávání“ vody podtlakem způsobeným proudem vzduchu *(12)*.

Jednou z možností, jak měřit rychlost proudících tekutin, je tzv. Prandtlova trubice – viz obr. 3.8. Čelní trubicí se měří celkový tlak (p_c), obalovou trubicí opatřenou bočními otvory kolmo na směr prodění se měří statický tlak (p_s). Jejich rozdíl je roven dynamickému tlaku (p_d), z jehož velikosti vyplývá velikost rychlosti proudící kapaliny:

$$p_c - p_s = p_d = \rho \cdot \frac{w^2}{2} \qquad (3.2.23).$$

Na obdobném principu je založena tzv. Pitotova trubice používaná k měření rychlosti letadel.



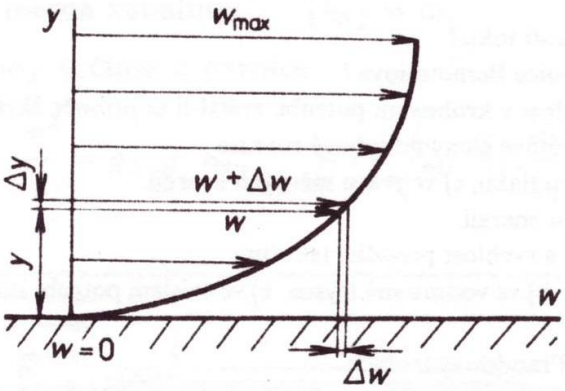
Obr. 3.8: Princip měření rychlosti proudící tekutiny Prandtlovou trubicí *(1)*.

3.3 USTÁLENÝ TOK SKUTEČÝCH KAPALIN

Proudění skutečných kapalin je obecně složité a je provázeno ztrátami mechanické energie, která se vlivem tření a víření mění v teplo.

Proti pohybu skutečných tekutin působí vnitřní tření – **viskozita**. Závisí především na přitažlivých silách mezi částicemi. Vzdušiny mají malou viskozity, kapaliny, zejména některé (např. dehet, glycerín, oleje), jsou velmi viskózní.

Při pohybu skutečných tekutin dochází ke vzájemnému ovlivňování pohybu jednotlivých částic tečnými silami, které vznikají uvnitř tekutiny mezi jednotlivými vrstvami. U stěny tekutina lne k povrchu stěny v tenké tzv. mezní vrstvě s nulovou rychlostí (viz obr. 3.8). Rychlost tekutiny roste s rostoucí vzdáleností od stěny. Tečná napětí (τ) vznikající mezi sousedními vrstvami budou tím větší, čím větší je přírůstek rychlosti (Δw) na vzdálenosti sousedních vrstev (Δy) v závislostech na viskozitě:



Obr. 3.8: Rychlostní profil tekutiny u pevné stěny *(1)*.

$$\tau = \eta \cdot \frac{\Delta w}{\Delta y} \qquad (3.3.1),$$

kde **η** je tzv. **dynamická viskozita** [$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$]. Dynamická viskozita se prakticky nemění se změnami tlaku, naopak značně závisí na teplotě. U kapalin s rostoucí teplotou dynamická viskozita klesá, u plynů s rostoucí teplotou roste.

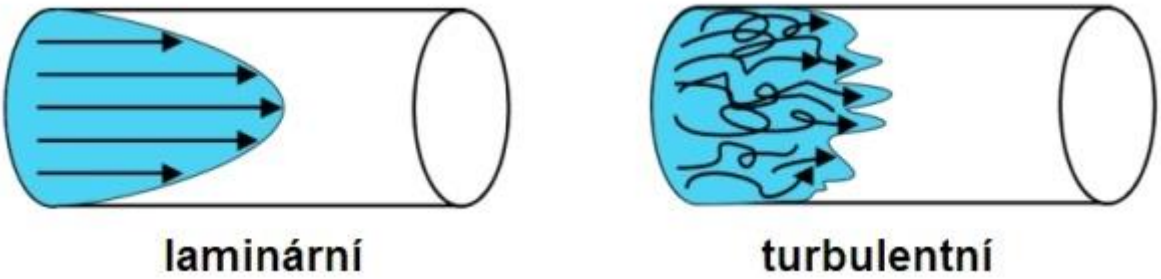
Dále se používá tzv. **kinematická viskozita ν** [$m^2 \cdot s^{-1}$], která je definována jako podíl dynamické viskozity (η) a hustoty (ρ):

$$\upsilon = \frac{\eta}{\rho} \qquad (3.3.2).$$

Kinematická viskozita tekutin závisí na změnách teploty obdobně jako dynamická viskozita. U plynů se mění i se změnami tlaku. Protože s růstem tlaku u plynů roste hustota, kinematická viskozita klesá.

Prodění skutečných tekutin můžeme rozdělit na:

- **<u>Laminární proudění</u>** – při kterém jsou proudnice rovnoběžné a neprolínají se. V různých vzdálenostech od pevného tělesa mají částice tekutiny různou rychlost, v proudové trubici kruhového průřezu má rychlostní profil tvar rotačního paraboloidu. Laminární proudění v praxi nastává jen při proudění vazkých kapalin malou rychlostí proudovou trubicí o malém průměru.
- **<u>Turbulentní proudění</u>** – při kterém se proudnice prolínají a částice tekutiny konají kromě posuvného pohybu i neuspořádaný složitý pohyb. Rychlost jednotlivých částic se nepravidelně mění (proudění není stacionární). Přestože částce tekutiny nemají stálou rychlost, je možné stanovit průměrné rozložení rychlosti v průřezu. Kromě tenké mezní vrstvy má průměrná rychlost v celém průřezu téměř stálou velikost.



Obr. 3.9: Druhy proudění *(13)*.

Obr. 3.10: Porovnání rychlostních profilů proudění v proudové trubici *(1)*.

Druh proudění posuzujeme podle **Reynoldsova čísla**:

$$\mathrm{Re} = \frac{w \cdot d}{\upsilon} \qquad (3.3.3),$$

kde Re je bezrozměrné Reynoldsovo číslo, w je průřezová rychlost, d je vnitřní průměr proudové trubice, ν je kinematická viskozita.

Pro vysoké hodnoty Re je proudění turbulentní, pro nízké je laminární. Hranice mezi těmito dvěma případy se nazývá kritické Reynoldsovo číslo, jehož hodnota se zjišťuje experimentálně a je pro různé kapaliny a různé druhy potrubí různá. Pro proudění vody v proudových trubicích hovoříme o laminárním proudění pro Re < 2320, pro otevřená koryta se uvádí laminární proudění pro Re < 580. Horní mez, nad níž nastává tzv. úplné turbulentní proudění, je široká, závisí na více faktorech, například i na způsobu zvyšování rychlosti. Při pozvolném zvyšování rychlosti se může laminární proudění v proudových trubicích zachovat až asi do Re = 13800, v otevřených korytech do přibližně Re = 3450. Mezi kritickým Reynoldsovým číslem a hodnotami, nad nimiž dochází k úplnému turbulentnímu proudění, hovoříme o tzv. přechodové oblasti.

Turbulentní proudění znamená zvýšení ztrát energie potřebných pro pohyb tekutin.

Hydraulické ztráty při proudění tekutin dělíme podle příčin vzniku na:

- **ztráty třením** při průtoku přímými úseky;
- **místní ztráty** způsobené především vířením tekutiny při průtoku specifickými místy.

Hydraulické ztráty můžeme vyjádřit jako ztrátu energie (případně měrné energie) nebo jako ztrátový tlak, protože v praxi se ztráta projeví právě jako nižší tlak oproti ideálnímu, který by vyplýval ze zjednodušení předpokládaných v minulé kapitole (ztráta se z důvodu platnosti rovnice kontinuity nemůže projevit jako pokles rychlosti).

Ztráty třením závisí na délce proudové trubice, jejím tvaru (a drsnosti), rychlosti proudění a druhu proudící tekutiny. **Tlakovou ztrátu třením** v proudové trubici kruhového průřezu můžeme vyjádřit vztahem:

$$p_{Zt} = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \rho \cdot \frac{w^2}{2} \qquad (3.3.4),$$

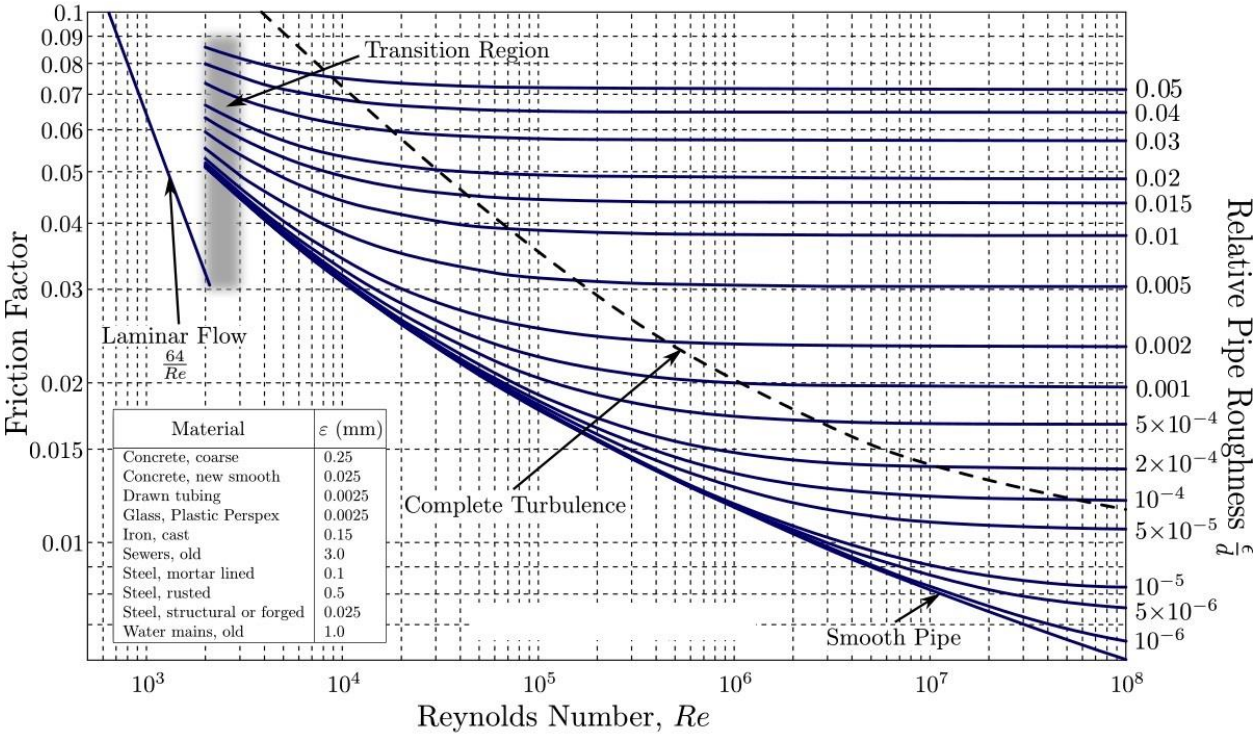
kde p_{Zt} je tlaková ztráta třením, λ je součinitel ztráty třením, l je délka úseku potrubí, d je vnitřní průměr potrubí, ρ je hustota tekutiny a w je průřezová rychlost. **Ztrátovou měrnou energii třením** e_{Zt} můžeme vyjádřit vztahem:

$$e_{Zt} = \frac{p_{Zt}}{\rho} = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{w^2}{2} \qquad (3.3.5).$$

Velikost součinitele ztráty třením λ můžeme pro laminární prodění vypočítat z Reynoldsova čísla:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \qquad (3.3.6).$$

Pro určení velikosti součinitele ztráty třením při turbulentním proudění se používá Moodyho graf.



Obr. 3.10: Moodyho graf, kde Friction Factor znamená součinitel ztráty třením λ a Relative Pipe Roughness je relativní drsnost potrubí daná podílem absolutní drsnosti ε (viz tabulka orientačních hodnot v grafu) a vnitřního průměru potrubí d *(14)*.

Potřebujeme-li stanovit velikost součinitele ztráty třením v potrubí λ, vypočteme nejprve Reynoldsovo číslo. V případě, že se jedná o turbulentní proudění, vypočteme ještě relativní drsnost potrubí a z těchto dvou hodnot odečteme z Moodyho grafu na levé svislé ose velikost součinitele λ.

<u>Místní ztráty</u> vznikají jako důsledek víření v jednotlivých specifických částech potrubí. **Tlaková místní ztráta** p_{Zm} roste s druhou mocninou průřezové rychlosti w, závisí na hustotě tekutiny a na součiniteli místní ztráty ξ (ten se pro jednotlivé druhy ztrát obvykle zjišťuje experimentálně, případně ho můžeme zjistit z literatury, např. IDELCHIK, I. E. *Handbook of Hydraulic Resistance.* [online]. 14. 11. 1966 [cit. 23. 1. 2019]. Dostupné z: https://www.nrc.gov/docs/ML1220/ML12209A041.pdf) a můžeme ji určit ze vztahu:

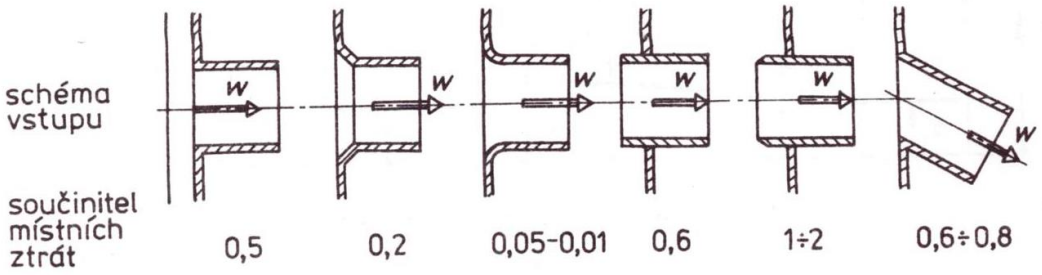
$$p_{Zm} = \xi \cdot \rho \cdot \frac{w^2}{2} \qquad (3.3.7),$$

Měrnou místní ztrátovou energii e_{Zm} můžeme vyjádřit vztahem:

$$e_{Zm} = \frac{p_{Zm}}{\rho} = \xi \cdot \frac{w^2}{2} \qquad (3.3.8).$$

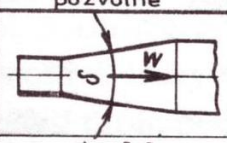
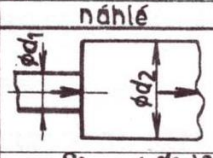
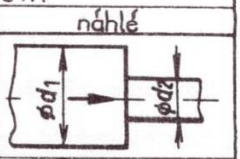
Základní druhy místních ztrát:

a/ Místní ztráty při vtoku do potrubí – orientační hodnoty součinitele místní ztráty jsou na obr. 3.11.



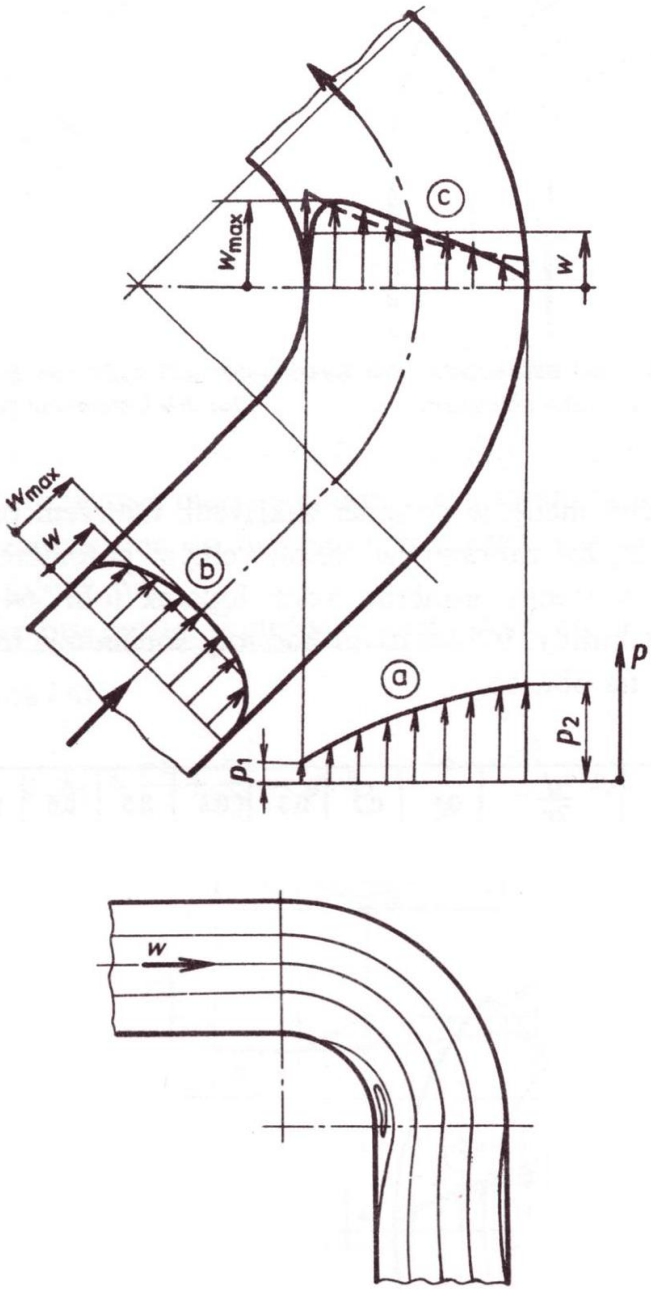
Obr. 3.11: Orientační hodnoty součinitele místní ztráty ξ při vtoku do potrubí *(1)*.

b/ Místní ztráta změnou průřezu – závisí na provedení změny průřezu. Je-li změna průřezu velmi pozvolná, ztráta vzniká převážně třením tekutiny o stěnu. Náhlá změna průřezu je vždy provázena tvořením vírů a většími ztrátami. Orientační hodnoty součinitele místní ztráty jsou v tabulce na obr. 3.12.

změna průřezu	rozšíření								zúžení						
	pozvolné				náhlé				pozvolné			náhlé			
náčrt															
—	$\sphericalangle \delta$ [°]				$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$				$\sphericalangle \delta$ [°]			$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$			
součinitel místních ztrát ξ	5°	10°	20°	30°	1,5	2	2,5	3	30°	45°	60°	0,1	0,2	0,4	0,8
	0,05	0,25	0,5	0,7	0,25	1	2,2	4	0,02	0,04	0,07	0,45	0,38	0,33	0,15

Obr. 3.12: Orientační hodnoty součinitele místní ztráty ξ změnou průřezu *(1)*.

c/ Místní ztráta změnou směru – je dána nerovnoměrným rozložením tlaku a rychlosti, případně odtržením proudnic od stěny se vznikem vírů. Vlivem odstředivých sil se zvětšuje tlak směrem ke vnějšímu obvodu, u vnitřního obvodu se naopak zmenšuje (což může na vnitřním obvodu vést k silnému poklesu tlaku). Jak vyplývá z hydrodynamického paradoxu, má to příslušný vliv na rychlost proudění (viz obr. 3.13). Ztráta je tím větší, čím je větší úhel změny směru a čím je menší poloměr zakřivení proudové trubice, orientační hodnoty součinitele místní ztráty jsou v tabulce na obr. 3.14.



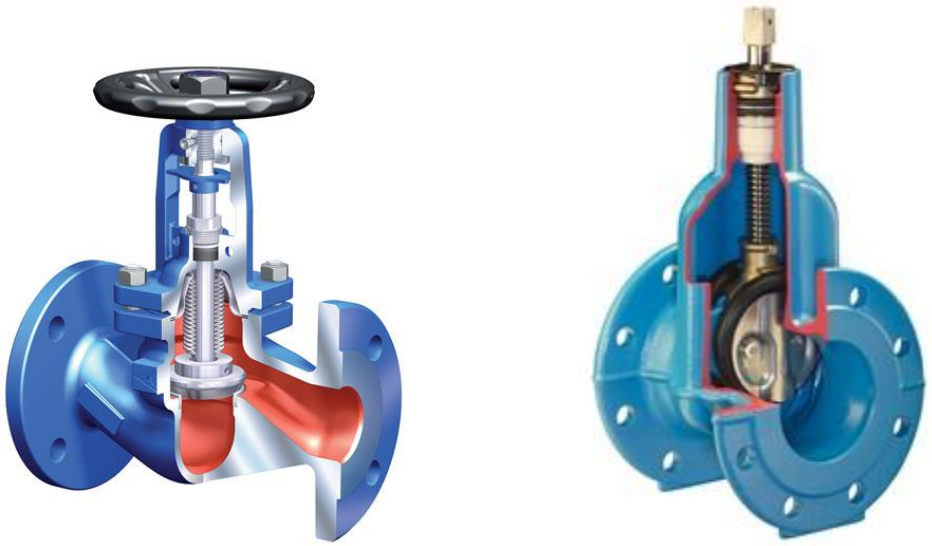
Obr. 3.13: Proudění tekutiny zakřivenou trubicí *(1)*.

schéma	$\frac{d}{2r}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1
	součinitel místních ztrát ξ	0,13	0,14	0,16	0,21	0,3	0,44	0,66	0,97	1,96

schéma	δ	20°	40°	60°	80°	90°
	ξ	0,05	0,14	0,36	0,74	0,98

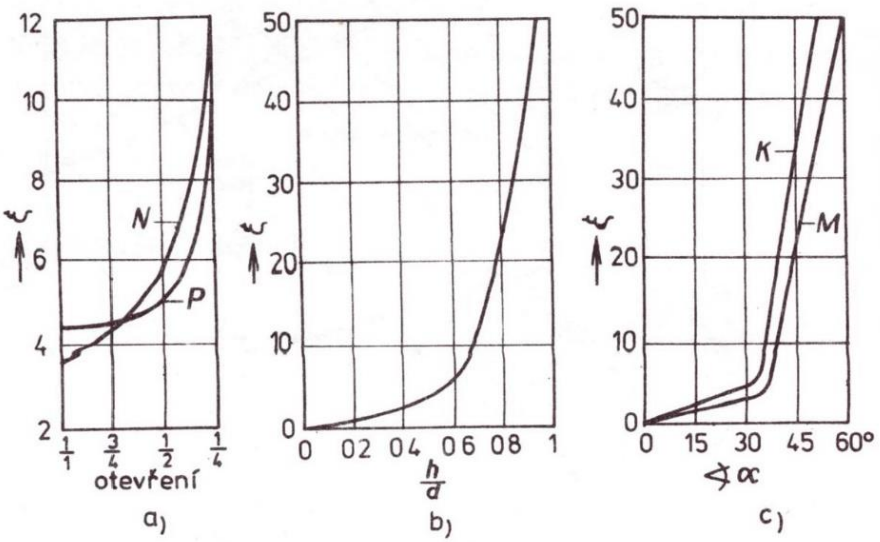
Obr. 3.14: Orientační hodnoty součinitele místní ztráty ξ změnou směru *(1)*.

d/ Místní ztráta v armaturách – armatury jsou prvky v potrubí, které mohou mít funkci regulační, uzavírací, pojistnou, zpětnou či směšovací. Jedná se o ventily, šoupátka, klapky, kohouty apod. různých konstrukcí. Průtoky kapalin armaturami jsou často velmi složité (viz obr. 3.15), z čehož vyplývají relativně velké ztráty. Součinitel místní ztráty v armatuře je zjišťován experimentálně a udáván výrobcem, orientační hodnoty součinitele místní ztráty jsou na obr. 3.16.



a/ b/

Obr. 3.15: Příklady armatur; a/ řez uzavíracím ventilem *(15)*; b/ řez šoupátkem *(16)*.



Obr. 3.14: Orientační příklady hodnot součinitele místní ztráty ξ v armaturách; a/ ventil přímý uzavírací (kde N – tekutina proudí z prostoru nad kuželkou, P – tekutina proudí z prostoru pod kuželkou); b/ šoupátko (kde h – zdvih, d – průměr); c/ přímý kohout (K) a motýlová klapka (kde α – úhel otevření) *(1)*.

<u>Celková hydraulická ztráta</u> sledovaného úseku potrubí je dána součtem všech dílčích ztrát třením a všech dílčích místních ztrát v tomto úseku potrubí. Můžeme ji opět vyjádřit jako celkovou **ztrátu tlakovou** p_Z:

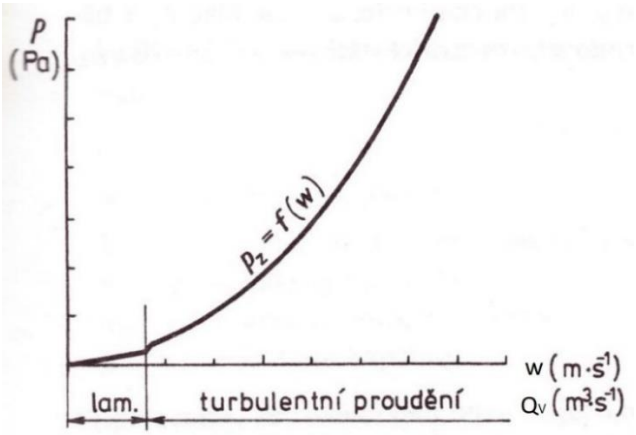
$$p_Z = \sum_{i=1}^{n} p_{Zti} + \sum_{i=1}^{m} p_{Zmi} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \frac{l_i}{d_i} \cdot \rho \cdot \frac{w_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{m} \xi_i \cdot \rho \cdot \frac{w_i^2}{2} \qquad (3.3.9)$$

nebo celkovou **ztrátu měrné energie** e_Z:

$$e_Z = \sum_{i=1}^{n} e_{Zti} + \sum_{i=1}^{m} e_{Zmi} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \frac{l_i}{d_i} \cdot \frac{w_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{m} \xi_i \cdot \frac{w_i^2}{2} \qquad (3.3.10),$$

kde n je počet dílčích úseků, na nichž je sledována ztráta třením, a m je počet sledovaných místních ztrát.

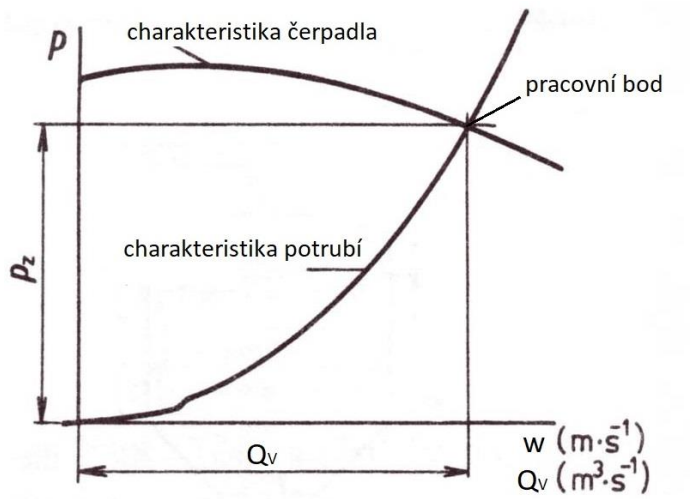
Z rovnic (3.3.9) a (3.3.10) je patrné, že celková hydraulická ztráta závisí na rychlosti prodění kapaliny s druhou mocninou (má tedy parabolický tvar). Křivka celkové tlakové ztráty v potrubí v závislosti na rychlosti proudění (nebo na průtoku) se nazývá **charakteristika potrubí**. Tvar křivky závislosti tlakové ztráty na rychlosti proudění nebo na průtoku je stejný, jak je patrné z rovnic (3.1.3) či (3.1.5).



Obr. 3.15: Charakteristika potrubí *(1)*.

Změní-li se se hydraulické odpory v potrubí (např. změnou drsnosti, regulací armatur atd.) změní se i charakteristika potrubí (při větších odporech je křivka strmější).

Podobné charakteristiky mají i čerpadla (stroje na dopravu a stlačování kapalin). Průsečík charakteristiky potrubí a charakteristiky čerpadla se nazývá pracovní bod.



Obr. 3.16: Rovnováha průtoku kapaliny *(upraveno podle 1)*.

<u>Bernoulliova (pohybová) rovnice pro skutečné kapaliny</u> se liší od Bernoulliovy rovnice pro ideální kapaliny tak, že je do ní doplněn ztrátový člen. Opět ji můžeme vyjádřit například **ve tvaru měrných energií** – tak že do rovnice (3.2.17) doplníme celkovou ztrátu měrné energie e_Z:

$$\boxed{g \cdot h_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = g \cdot h_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + e_Z} \qquad (3.3.11)$$

nebo **v tlakovém tvaru** – tak že do rovnice (3.2.20) doplníme celkovou tlakovou ztrátu p_Z:

$$\boxed{\rho \cdot g \cdot h_1 + p_1 + \rho \cdot \frac{w_1^2}{2} = \rho \cdot g \cdot h_2 + p_2 + \rho \cdot \frac{w_2^2}{2} + p_Z} \qquad (3.3.12).$$

Jak bylo uvedeno na začátku kapitoly, ztrátová energie ze přemění na energii tepelnou (tzv. disipovanou), ale obvykle ne v takovém množství, aby se to projevilo zásadním vzrůstem teploty.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

(1) VONDRÁČEK, Vlastimil. *Mechanika IV. Mechanika tekutin a termomechanika pro SPŠ strojnické* 1. vyd. Praha: SNTL, 1978. ISBN 04-206-78.

(2) Dopravníky a zdvihadla. [online]. Olomouc: SPŠS. [cit. 2. 8. 2017]. Dostupné z: http://www.spssol.cz/rsimages/DIGI1/html/cad/Dopravn%C3%ADky%20a%20zdvihadla/Modul.html

(3) Sbírka řešených úloh. Fyzika. Mechanika. Hydraulický lis. [online]. Praha: UK. 12. 7. 2016 [cit. 2. 8. 2017]. Dostupné z: http://reseneulohy.cz/1001/hydraulicky-lis

(4) Výškoměr. [online]. [cit. 3. 8. 2017]. Dostupné z: http://pokusy.chytrak.cz/schemata/vyskac.htm

(5) Spojené nádoby. [online]. Banská Bystrica: Učebné pomôcky, s.r.o., ©2012-2017 [cit. 13. 9. 2017]. Dostupné z: http://www.ucebne-pomocky.sk/produkt/1820/spojene-nadoby

(6) JOBI Hadicová vodováha komplet 10m ZN15992. [online]. Liberec: Heureka Shopping, s.r.o., ©2000-2017 [cit. 13. 9. 2017]. Dostupné z: https://vodovahy.heureka.cz/jobi-hadicova-vodovaha-komplet-10m-zn15992/specifikace/#section

(7) Bypass level gauges. [online]. Direct Industry, ©2017 [cit. 13. 9. 2017]. Dostupné z: http://www.directindustry.com/industrial-manufacturer/bypass-level-gauge-219518.html

(8) Wikipedie. [online]. [cit. 13. 9. 2017]. Dostupné z: http://commons.wikimedia.org/wiki/Main_Page

(9) KRÁLOVÁ, Magda. Věda a technika v pozadí: Tlak vody. *Techmania Science Center: Eduportál* [online]. Praha: Techmania Science Center, o.p.s. [cit. 5. 8. 2018]. Dostupné z: http://edu.techmania.cz/cs/veda-v-pozadi/833

(10) GRUBER, Josef. *Mechanika. Hydromechanika* [online]. Plzeň: SPŠ strojnická a SOŠ profesora Švejcara [cit. 12. 1. 2019]. Dostupné z: file:///F:/OPORA%20-%20Hydromechanika%202017/mec5_txt.pdf

(11) Mechanics Tips. *Bernoulli Equation* [online]. 20. 2. 2016. [cit. 14. 1. 2019]. Dostupné z: http://mechanicstips.blogspot.com/2016/02/bernoulli-equation.html

(12) FYZMATIC.píše. *Bernoulliho rovnice – hydrodynamický paradox* [online]. 5. 5. 2009. [cit. 16. 1. 2019]. Dostupné z: http://fyzmatik.pise.cz/869-bernoulliho-rovnice-hydrodynamicky-paradox.html

(13) Prodění kapalin [online]. SZŠ Karviná, 2006. [cit. 23. 1. 2019]. Dostupné z: http://sszdra-karvina.cz/bunka/fy/02prou/prshr.htm

(14) Součinitel ztráty třením. In: *Wikipedia* [online]. 26. 5. 2017. [cit. 22. 1. 2019]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Sou%C4%8Dinitel_ztr%C3%A1ty_t%C5%99en%C3%ADm

(15) Armatury a potrubní díly. *APD: Pára, voda, olej, plynné látky, agresivní a neagresivní kapaliny* [online]. Velká Bíteš: Armatury a potrubní díly, s.r.o., ©2002 - 2019. [cit. 25. 1. 2019]. Dostupné z: http://www.arpod.cz/armatury-potrubni-dily.php

(16) Šoupě „A“ přírubové krátké. *Hawle* [online]. Jesenice u Prahy: Hawle armatury spol. s r.o., ©2014. [cit. 25. 1. 2019]. Dostupné z: https://www.hawle.cz/cz/produkt/soupea-prirubove-kratke-400a12500016/?nRefCatId

Název: ZÁKLADY HYDROMECHANIKY

Autor: Pavel Dostál

Rok vydání: 2021

Vydání: první

ISBN 978-80-7599-230-7