Přijímací řízení 2015/16
Přírodovědecká fakulta
Ostravská univerzita v Ostravě
Navazující magisterské studium, obor Aplikovaná matematika
(1. červen 2016)

Příklad 1 Určete taková $a, b \in \mathbb{R}$, aby funkce

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

měla lokální maximum v bodě $x = -1$ a lokální minimum v bodě $x = 3$.

Řešení: Vypočteme první derivaci funkce $f(x)$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b.$$

V bodech $x = -1$ a $x = 3$, ve kterých má mít funkce $f(x)$ extrém, musí být hodnota její první derivace $f'(x)$ nulová, proto

$$\begin{aligned} f'(-1) = 3 - 2a + b &= 0, \\ f'(3) = 27 + 6a + b &= 0. \end{aligned}$$

Řešíme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} -2a + b &= -3, \\ 6a + b &= -27, \end{aligned}$$

jejímž řešením je $a = -3$ a $b = -9$. Přesvědčíme se ještě, že v bodě $x = -1$ skutečně nastává lokální maximum a že v bodě $x = 3$ nastává lokální minimum. Skutečně hodnota druhé derivace

$$f''(x) = 6x + 2a = 6x - 6$$

v bodě $x = -1$ je $f''(-1) = -12 < 0$ a v bodě $x = 3$ je $f''(3) = 12 > 0$.

Příklad 2 Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic s parametrem p

$$\begin{aligned} px_1 + 2x_2 &= 1, \\ 2x_1 + px_2 &= 1. \end{aligned}$$

Diskutejte řešení vzhledem k hodnotě parametru p.

Řešení: Jedná se o nehomogenní soustavu lineárních algebraických rovnic. Matice soustavy

$$A = \begin{pmatrix} p & 2 \\ 2 & p \end{pmatrix}$$

má determinant $\det A = p^2 - 4 = (p-2)(p+2)$. Matice rozšířená vypadá

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} p & 2 & 1 \\ 2 & p & 1 \end{array}\right).$$

Nyní určíme ty reálné hodnoty parametru p, pro které je matice soustavy singulární, tzn. kdy $\det A = 0$. Jsou to hodnoty $p = -2$ a $p = 2$. Pro všechny ostatní hodnoty parametru $p \neq -2$ a $p \neq 2$ je matice soustavy regulární a bude existovat právě jedno řešení soustavy, které lze určit např. Cramerovým pravidlem

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, 2,$$

kde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & p \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} p & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Provedeme výpočty determinantů

$$\det A_1 = \det A_2 = p - 2$$

a dostáváme jediné řešení

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{p+2}, \frac{1}{p+2}\right)$$

platné pro všechny hodnoty parametru, pro které $p \neq -2$ a $p \neq 2$.

Pro hodnotu parametru $p = -2$ je matice soustavy singulární. Matice rozšířená $(A|b)$ má tvar

$$\left(\begin{array}{rr|c} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|c} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right),$$

odkud vidíme, že $\operatorname{rank}(A) \neq \operatorname{rank}(A|b)$, tedy soustava nemá řešení, množina řešení je $\emptyset$.

Pro hodnotu parametru $p = 2$ je matice soustavy rovněž singulární. Řádkovými ekvivalentními úpravami převedeme matici rozšířenou $(A|b)$ do tvaru

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Zde vidíme, že $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b) = 1$. Soustava má nekonečně mnoho řešení, dimenze množiny řešení je 1. Množinu řešení je možno zapsat parametricky např. takto

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} - t, \\ x_2 &= t, \end{aligned}$$

nebo pomocí fundamentálního systému řešení (báze množiny řešení)

$$(x_1, x_2) = \langle(-1/2, 1)\rangle.$$

Příklad 3 Určete vzájemnou polohu přímek p a q, kde přímka p je dána body $A[1,1]$ a $B[2,-1]$ a přímka q je dána body $C[0,3]$ a $D[1,5]$. V případě různoběžnosti nalezněte jejich průsečík a vypočítejte jejich odchylku.

Řešení: Parametrické rovnice daných přímek jsou:

$$\begin{aligned} p\colon x &= 1 + t \\ y &= 1 - 2t \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} q\colon x &= s \\ y &= 3 + 2s \end{aligned}$$

kde $t, s \in \mathbb{R}$. Porovnáním dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} 1 + t &= s \\ 1 - 2t &= 3 + 2s \end{aligned}$$

jejíž řešení je $t = -1$ a $s = 0$. Přímky p a q jsou tedy různoběžné s průsečíkem $[0,3]$. Jejich odchylka α je

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|(1,-2) \cdot (1,2)|)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{5} \\ \alpha &\doteq 53°8' \end{aligned}$$

Příklad 4 Najděte obecné řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu

$$2xy' = 6y - x^2.$$

Řešení: Lineární diferenciální rovnici lze řešit buď metodou *variace konstanty* nebo metodou *integračního faktoru*. Rovnici napřed rozřešíme vzhledem k derivaci

$$y' = \frac{3}{x}y - \frac{x}{2}.$$

Metoda *variace konstanty*: Vyřešíme nejdříve příslušnou homogenizovanou diferenciální rovnici

$$y' = \frac{3}{x}y.$$

Provedeme separaci proměnných

$$\frac{dy}{y} = \frac{3}{x}dx$$

a po integraci obou stran rovnice dostáváme

$$\int \frac{dy}{y} = 3\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = 3\ln|x| + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná integrační konstanta. Po odlogaritmování obdržíme obecné řešení homogenizované diferenciální rovnice ve tvaru

$$y_h(x) = Kx^3, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice $y_p(x)$ předpokládáme ve tvaru $y_p(x) = K(x)\,x^3$, kde $K(x)$ je tzv. *variovaná konstanta*. Dosazením do rovnice obdržíme jednoduchou diferenciální rovnici pro neznámou $K(x)$:

$$K'(x)\,x^3 = -\frac{x}{2},$$

což po integraci dává $K(x) = \frac{1}{2x}$. Takže partikulární řešení nehomogenní rovnice vypadá

$$y_p(x) = K(x)\,x^3 = \frac{1}{2x}x^3 = \frac{x^2}{2}.$$

Konečně množinu všech řešení lineární diferenciální rovnice lze vyjádřit ve tvaru

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Kx^3 + \frac{x^2}{2}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Metoda *integračního faktoru*: obě strany diferenciální rovnice

$$y' = \frac{3}{x}y - \frac{x}{2}.$$

násobíme funkcí

$$\mathrm{e}^{-\int \frac{3dx}{x}} = e^{-3\ln x} = \frac{1}{x^3},$$

tzv. *integračním faktorem* a dostáváme

$$\frac{1}{x^3}y' = \frac{3}{x^4}y - \frac{1}{2x^2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^3}y' - \frac{3}{x^4}y = -\frac{1}{2x^2}.$$

Levá strana poslední rovnice je derivací výrazu $\frac{y}{x^3}$, takže obě strany rovnice

$$\left(\frac{y}{x^3}\right)' = -\frac{1}{2x^2}$$

lze přímo integrovat

$$\frac{y}{x^3} = -\int \frac{dx}{2x^2} = \frac{1}{2x} + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta. Takže obecné řešení pak je

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + Cx^3, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Přijímací řízení 2015/16
Přírodovědecká fakulta
Ostravská univerzita v Ostravě
Navazující magisterské studium, obor Aplikovaná matematika
(1. červen 2016)

Příklad 1 Určete hodnotu parametru $p \in \mathbb{R}$ ve funkční závislosti

$$f(x) = p\sqrt[4]{x}$$

tak, aby objem tělesa vzniklého rotací grafu této funkce $f(x)$ kolem osy x v mezích $x \in \langle 0; a\rangle$ měl jednotkový objem.

Řešení: Objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce $f(x)$ kolem osy x v mezích $x \in \langle 0; a\rangle$ vypočteme podle vzorce

$$V = \pi \int_0^a f^2(x)\mathrm{d}x$$

V našem případě

$$V = \pi \int_0^a (p\sqrt[4]{x})^2\mathrm{d}x = \pi p^2 \int_0^a \sqrt{x}\mathrm{d}x = \pi p^2 \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^a = \frac{2}{3}\pi p^2 a\sqrt{a} = \frac{2}{3}\pi p^2 a^{3/2}$$

Má-li být objem rotačního tělesa jednotkový

$$\frac{2}{3}\pi p^2 a\sqrt{a} = 1,$$

dostáváme, že parametr p ve funkční závislosti $f(x) = p\sqrt[4]{x}$ musí být roven

$$p = \sqrt{\frac{3}{2\pi a\sqrt{a}}} = \sqrt{\frac{3}{2\pi a^{3/2}}}.$$

Příklad 2 Řešte soustavu dvou lineárních algebraických rovnic s parametry $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} ax_1 - x_2 &= 1, \\ x_1 + x_2 &= b. \end{aligned}$$

Diskutejte řešení vzhledem k hodnotám parametrů a, b.

Řešení: Jedná se o nehomogenní soustavu lineárních algebraických rovnic. Matice soustavy

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

má determinant $\det A = a + 1$. Matice rozšířená vypadá

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} a & -1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{array}\right).$$

Matice soustavy je singulární pro hodnotu parametru $a = -1$. Pro všechny ostatní hodnoty parametru $a \neq -1$ je matice soustavy regulární a bude existovat právě jedno řešení soustavy, které lze určit např. Cramerovým pravidlem

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, 2,$$

kde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ b & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

Provedeme výpočty determinantů

$$\det A_1 = 1 + b \quad \det A_2 = ab - 1$$

a dostáváme jediné řešení

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{b+1}{a+1}, \frac{ab-1}{a+1}\right)$$

platné pro všechny hodnoty parametru, pro které $a \neq -1$.

Pro hodnotu parametru $a = -1$ je matice soustavy singulární. Matici rozšířenou $(A|b)$ lze řádkovou ekvivalentní úpravou převést na tvar

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+b \end{array}\right),$$

odkud vidíme, že v případě $1 + b = 0$, tzn. $b = -1$, platí $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b) = 1$. To znamená, že v případě $a = -1, b = -1$ má soustava

nekonečně mnoho řešení, dimenze množiny řešení je 1. Množinu řešení je možno zapsat parametricky např. takto

$$x_1 = t, \quad x_2 = -1 - t, \quad t \in \mathbb{R}$$

nebo takto

$$x_1 = -1 - t, \quad x_2 = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

nebo pomocí fundamentálního systému řešení (báze množiny řešení)

$$(x_1, x_2) = \langle (1, -2) \rangle.$$

V případě $a = -1, b \neq -1$ vidíme, že $\operatorname{rank}(A) \neq \operatorname{rank}(A|b)$, tedy soustava nemá řešení, množina řešení je $\emptyset$.

Příklad 3 Do koule poloměru r je vepsán kvádr, jehož rozměry a, b, c jsou v poměru $2 : 3 : 6$. Určete v jakém poměru jsou objemy těchto těles a v jakém poměru jsou povrchy těchto těles.

Řešení: Skutečnost, že kvádr o rozměrech a, b, c je vepsán do koule poloměru r znamená, že tělesová úhlopříčka kvádru

$$u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

se rovná průměru koule, tedy

$$u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 2r. \tag{1}$$

Rozměry kvádru a, b, c jsou v poměru $2 : 3 : 6$, lze proto psát

$$\begin{aligned} a &= 2p, \\ b &= 3p, \\ c &= 6p, \end{aligned}$$

kde $p > 0$ je reálný parametr. Pro velikost tělesové úhlopříčky takového kvádru pak dostáváme

$$u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{4p^2 + 9p^2 + 36p^2} = \sqrt{49p^2} = 7p.$$

Má - li platit (1), lze hodnotu parametru p vyjádřit pomocí poloměru koule r jako $p = 2r/7$. Objem našeho kvádru tedy je

$$V_{\text{kvádr}} = a \cdot b \cdot c = 2p \cdot 3p \cdot 6p = 36p^3 = 36\left(\frac{2r}{7}\right)^3 = \frac{288}{343}r^3.$$

Pro objem koule poloměru r platí

$$V_{\text{koule}} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Hledaný poměr objemů těchto těles tedy je

$$V_{\text{koule}} : V_{\text{kvádr}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{288}{343}r^3} = \frac{4 \cdot 343\,\pi}{3 \cdot 288} = \frac{343\,\pi}{216}, \quad \text{obráceně} \quad V_{\text{kvádr}} : V_{\text{koule}} = \frac{216}{343\,\pi}.$$

Povrch našeho kvádru je

$$P_{\text{kvádr}} = 2(a{\cdot}b{+}a{\cdot}c{+}b{\cdot}c) = 2(2p{\cdot}3p{+}2p{\cdot}6p{+}3p{\cdot}6p) = 72p^2 = 72\left(\frac{2r}{7}\right)^2 = \frac{288}{49}r^2.$$

Pro povrch koule poloměru r platí

$$P_{\text{koule}} = 4\pi r^2.$$

Hledaný poměr povrchů těchto těles tedy je

$$P_{\text{koule}} : P_{\text{kvádr}} = \frac{4\pi r^2}{\frac{288}{49}r^2} = \frac{49 \cdot 4\,\pi}{288} = \frac{49\,\pi}{72}, \quad \text{obráceně} \quad P_{\text{kvádr}} : P_{\text{koule}} = \frac{72}{49\,\pi}.$$

Příklad 4 Najděte obecné řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu

$$x^2y' + xy + 1 = 0.$$

Řešení: Lineární diferenciální rovnici lze řešit buď metodou *variace konstanty* nebo metodou *integračního faktoru*. Rovnici napřed rozřešíme vzhledem k derivaci

$$y' = -\frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

Metoda *variace konstanty*: Vyřešíme nejdříve příslušnou homogenizovanou diferenciální rovnici

$$y' = -\frac{y}{x}.$$

Provedeme separaci proměnných

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

a po integraci obou stran rovnice dostáváme

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\ln|x| + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná integrační konstanta. Po odlogaritmování obdržíme obecné řešení homogenizované diferenciální rovnice ve tvaru

$$y_h(x) = \frac{K}{x}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice $y_p(x)$ předpokládáme ve tvaru $y_p(x) = \frac{K(x)}{x}$, kde $K(x)$ je tzv. *variovaná konstanta*. Dosazením do rovnice obdržíme jednoduchou diferenciální rovnici pro neznámou $K(x)$:

$$\frac{K'(x)}{x} = -\frac{1}{x^2},$$

což po integraci dává $K(x) = -\ln|x|$. Takže partikulární řešení nehomogenní rovnice vypadá

$$y_p(x) = \frac{K(x)}{x} = -\frac{\ln|x|}{x}.$$

Konečně množinu všech řešení lineární diferenciální rovnice lze vyjádřit ve tvaru

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{K}{x} - \frac{\ln|x|}{x} = \frac{K - \ln|x|}{x}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Metoda *integračního faktoru*: obě strany diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

násobíme funkcí

$$\mathrm{e}^{-\int \frac{-dx}{x}} = e^{\ln x} = x,$$

tzv. *integračním faktorem* a dostáváme

$$xy' = -y - \frac{1}{x}, \quad \Rightarrow \quad xy' + y = -\frac{1}{x}.$$

Levá strana poslední rovnice je derivací součinu xy, takže obě strany rovnice

$$(xy)' = -\frac{1}{x}$$

lze přímo integrovat

$$xy = -\int \frac{dx}{x} = -\ln|x| + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta. Takže obecné řešení v explicitním tvaru pak je

$$y(x) = \frac{-\ln|x| + C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$