Přijímací řízení 2016/17 matematika
Přírodovědecká fakulta
Ostravská univerzita v Ostravě
Bakalářské studium AMBk

Příklad 1 Stanovte podmínky řešitelnosti a zjednodušte výraz

$$\frac{x^2-1}{x} : \left[\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} \cdot \left(1-\frac{1}{x}\right)\right].$$

(20 bodů)

Řešení: Výraz má smysl, jestliže $x \neq -1$, $x \neq 0$ a $x \neq 1$.

$$\begin{aligned}\frac{x^2-1}{x} : \left[\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} \cdot \left(1-\frac{1}{x}\right)\right] &= \frac{(x+1)(x-1)}{x} : \left[\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} \cdot \frac{x-1}{x}\right] = \\ &= \frac{(x+1)(x-1)(x-1)^2 x}{x(x+1)^2(x-1)} = \\ &= \frac{(x-1)^2}{x+1}\end{aligned}$$

Příklad 2 Řešte goniometrickou rovnici

$$\cos^2 x + \sin x + 1 = 0\,.$$

(20 bodů)

Řešení: Použijeme vzorec $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, tedy $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \sin x + 1 &= 0 \\ 1 - \sin^2 x + \sin x + 1 &= 0 \\ \sin^2 x - \sin x - 2 &= 0\end{aligned}$$

Zavedeme substituci $\sin x = t$ a řešíme kvadratickou rovnici $t^2 - t - 2 = 0$, jejíž kořeny jsou $t_1 = -1$ a $t_2 = 2$. Vrátíme se zpět k původní neznámé a dostaneme dvě rovnice $\sin x_1 = -1$ a $\sin x_2 = 2$. Rovnice $\sin x_2 = 2$ nemá řešení, protože oborem hodnot funkce sinus je interval $\langle -1, 1\rangle$. Řešením rovnice $\sin x = -1$ je

$$x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\,,$$

kde $k \in \mathbb{Z}$.

Příklad 3 Vypočítejte délku oblouku AB kružnice $k(S, 5\,\text{cm})$ $(A, B \in k)$, jestliže $|\sphericalangle ASB| = 60°$. Počítejte s $\pi = 3,14$.
(20 bodů)

Řešení: Obvod kružnice je $o = 2\pi r = 2\pi \cdot 5\,\text{cm} = 31,4\,\text{cm}$. Oblouk AB zabírá $\frac{1}{6}$ obvodu kružnice k, tedy jeho délka je (po zaokrouhlení na dvě desetinná místa) $5,23\,\text{cm}$.

Příklad 4 Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}6x + 3y - 2z &= 2 \\ x - 3y + 2z &= 5 \\ 2x + y + z &= 9\end{aligned}$$

(20 bodů)

Řešení: Z druhé rovnice vyjádříme $x = 3y - 2z + 5$ a dosadíme do první a třetí rovnice.

$$\begin{aligned} 6(3y - 2z + 5) + 3y - 2z &= 2 \\ 2(3y - 2z + 5) + \ \ y + \ \ z &= 9 \\ \hline -15y + 10z &= -28 \\ -\ \ 5y + \ \ 5z &= -1 \end{aligned}$$

Vznikne soustava dvou rovnic o dvou neznámých. Tu vyřešíme tak, že první rovnici vynásobíme číslem -1 a druhou rovnici číslem 3. Poté obě rovnice sečteme a dostaneme hodnotu neznámé z.

$$\begin{aligned} 15y - 10z &= 28 \\ -15y + 15z &= -3 \\ \hline 5z &= 25 \\ z &= 5 \end{aligned}$$

Hodnotu $z = 5$ dosadíme do některé z předchozích rovnic a dostaneme hodnotu $y = 2$. Nakonec dostaneme $x = 1$.

Příklad 5 Určete definiční obor funkce $y = \ln(x + 1)$ a určete předpis pro funkci k ní inverzní. Načrtněte grafy obou funkcí (každou do jednoho obrázku).
(20 bodů)

Řešení: Argument logaritmu musí být kladný, tedy definiční obor uvedené funkce je interval $(-1, \infty)$. Funkce inverzní bude

$$x = \ln(y + 1)\,.$$

Po úpravě dostaneme

$$y = \mathrm{e}^x - 1\,.$$