Přijímací řízení 2015/16 matematika
Přírodovědecká fakulta
Ostravská univerzita v Ostravě
Navazující magisterské studium učitelské

Příklad 1 Určete, pro které hodnoty proměnné x je funkce

$$y = x^3(1-x)$$

klesající.
(25 bodů)

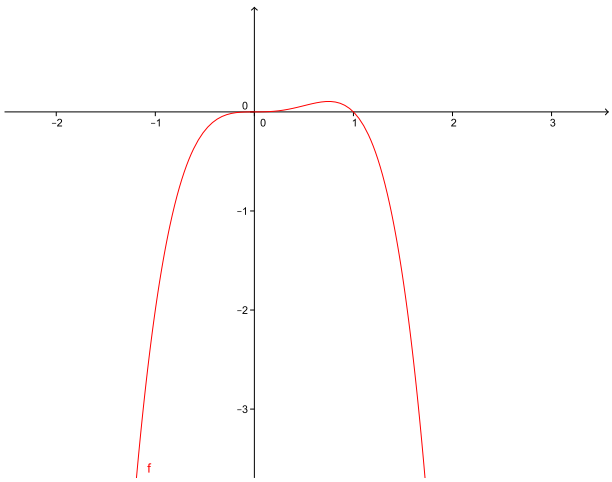
Řešení: Průběh funkce můžeme určit z první (případně druhé) derivace.

$$y' = 3x^2 - 4x^3 = x^2(3-4x)$$

Body, ve kterých první derivace nabývá nuly jsou $x_1 - 0$, $x_2 = \frac{3}{4}$. Snadno pomocí druhé derivace

$$y'' = 6x - 12x^2 = 6x(1-2x)$$

zjistíme, že $x_1 = 0$ je inflexní bod a že funkce je klesající na intervalu $x \in (\frac{3}{4}, \infty)$.



Příklad 2 Řešte homogenní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Určete dimenzi a bázi řešení.
(25 bodů)

Řešení:
Soustavu můžeme řešit maticově:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Využijeme řádkové elementární transformce a budeme upravovat tak, abychom dostali matici na redukovaný trojúhelníkový tvar. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimenze řešení je $3 - h(A) = 3 - 2 = 1$, a řešení bude $\overline{v} = (13t, 2t, 7t)^T, t \in \mathbb{R}$.

Příklad 3 Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = x^3 + 3.$$

(25 bodů)

Řešení: Rovnici lze přímo integrovat:

$$y' = \frac{dy}{dx} = x^3 + 3,$$

$$\int dy = \int (x^3 + 3)dx,$$

$$y = \frac{x^4}{4} + 3x + c, c \in \mathbb{R}.$$

Příklad 4 Uvažujme množinu $M = \{3a, a \in \mathbb{Z}\}$ a operace

$$\oplus : \ M \times M \to M,$$

$$\odot : \ M \times M \to M$$

definované takto:

$$3a \oplus 3b = 3(a + b), \ 3a \odot 3b = 3(a \cdot b),$$

kde $+, \cdot$ jsou klasické sčítání a násobení celých čísel. Rozhodněte, jakou strukturu tvoří $(M, \oplus, \odot)$.
(25 bodů)

Řešení: První operace $\oplus$ je klasickým součtem (na podmnožině $M = \{3a, a \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}$, tedy komutativita a asociativita platí triviálně. Neutrálním prvkem bude nula, tedy prvek $3 \cdot 0$. Aditivní inverze jsou pak prvky opačné, tj. k prvku $3a$ je to prvek $3(-a) = -3a$. $(M, \oplus)$ tedy tvoří komutativní grupu.
Druhá operace $\odot$ není klasickým součinem, nicméně komutativitu i asociativitu lze snadno ukázat, například:

$$(3a \odot 3b) \odot 3c = 3(a \cdot b) \odot 3c = 3((a \cdot b) \cdot c) = 3(a \cdot (b \cdot c)) = 3a \odot 3(b \cdot c) = 3a \odot (3b \odot 3c).$$

Neutrální prvek musí být takový, že $3a \odot 3e = 3(a \cdot e) = 3a$, z čehož vidíme, že ním bude $3 \cdot 1$. Multiplikativní inverze zde nebudou. $(M, \odot)$ tvoří pologrupu s jednotkovým prvkem. Rozepsáním lze ukázat také distributivní zákon. Struktura $(M, \oplus, \odot)$ je okruhem (oborem integrity).