Přijímací řízení 2015/16 matematika
Přírodovědecká fakulta
Ostravská univerzita v Ostravě
Navazující magisterské studium

Příklad 1 Určete, pro které hodnoty proměnné x je funkce

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

rostoucí.
(25 bodů)

Řešení: Průběh funkce můžeme určit z první (případně druhé) derivace.

$$y' = \frac{1(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Funkce je rostoucí na intervalu, kde $y' > 0$, tedy pro $1 - x^2 > 0$, $x \in (-1, 1)$.

Příklad 2 Řešte soustavu nehomogenních lineárních algebraických rovnic s parametrem p.

$$\begin{aligned} px_1 + x_2 + x_3 &= p \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Diskutujte řešení vzhledem k parametru p.
(25 bodů)

Řešení:
Soustavu můžeme řešit maticově:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & p \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Využijeme řádkové elementární transfromce a budeme upravovat tak, abychom dostali matici na redukovaný trojúhelníkový tvar. Dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & p \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-p & 1-p & p \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Pokud $1 - p = 0$, tedy $p = 1$ tak dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

což znamená, že soustava nemá žádné řešení. V opačném případě pro $p \neq 1$ bude existovat právě jedno řešení, které získáme zpětnou substitucí z matice: $\overline{v} = (\frac{p}{p-1}, \frac{2p-1}{p-1}, 1)^T$.

Příklad 3 Vypočítejte určitý integrál

$$\int_{-1}^{1} \frac{-5}{(x-3)^3} dx.$$

Vysvětlete geometricky, co znamená výsledek.
(25 bodů)

Řešení:

$$\int_{-1}^{1} \frac{-5}{(x-3)^3} dx = -5 \int_{-1}^{1} (x-3)^{-3} dx =$$

$$= -5 \left[\frac{1}{-2(x-3)^{-2}} \right]_{-1}^{1} = \frac{5}{2}((-2)^{-2} - (-4)^{-2}) = \frac{15}{32}.$$

Výsledná hodnota určitého integrálu určuje obsah plochy pod křivkou danou funkcí $\frac{-5}{(x-3)^3}$, omezenou přímkami $x = -1, x = 1$ a osou x.

Příklad 4 Určete hodnost a determinant následující matice a rozhodněte, zda je regulární nebo singulární.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -7 & 6 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(25 bodů)

Řešení: Determinant lze určit Sarrusovým pravidlem:

$$det \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -7 & 6 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 36 + 45 + 0 - 72 - 0 - 63 = -54.$$

Matice je tedy regulární a její hodnost musí být rovna počtu řádků, $h = 3$.