Přijímací řízení 2015/16 matematika
Přírodovědecká fakulta
Ostravská univerzita v Ostravě
Bakalářské studium AMBk

Příklad 1 Stanovte definiční obor výrazu (podmínky, kdy má výraz smysl) a pak výraz zjednodušte.

$$\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}\cdot a^{-1}}\right)^{0,6}.$$

(12 bodů)

Řešení: Výraz má smysl pro hodnoty $a > 0$.

$$\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}\cdot a^{-1}}\right)^{0,6} = \left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-1}}\right)^{\frac{3}{5}} =$$

$$= \left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{-\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{3}{5}} = (a^{\frac{5}{6}})^{\frac{3}{5}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}.$$

Příklad 2 Řešte v reálných číslech $\mathbb{R}$ nerovnici

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{1+x}{1-x} < 0.$$

(12 bodů)

Řešení:

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{1+x}{1-x} < 0$$

$$\frac{(x-1)(1-x)-(1-x)^2}{(x+1)(1-x)} < 0$$

$$\frac{-2-2x^2}{(x+1)(1-x)} < 0$$

$$\frac{-2(x^2+1)}{(x+1)(1-x)} < 0.$$

Vzhledem k tomu, že chceme, aby celý zlomek byl záporný, a čitatel je záporný vždy, musí být jmenovatel kladný, a to vede na řešení $x \in (-1, 1)$.

Příklad 3 Řešte v reálných číslech $\mathbb{R}$ rovnici

$$2\log(x-2) = \log(14-x).$$

(12 bodů)

Řešení:

$$2\log(x-2) = \log(14-x)$$

$$\log(x-2)^2 = \log(14-x).$$

Z rovnosti základů u logarimtů na obou stranách plyne rovnost argumentů, tedy $(x-2)^2 = 14 - x$. Řešením této kvadratické rovnice dostaneme kořeny $x_1 = 5$, a $x_2 = -2$. Vzhledem k podmínce, že argument logaritmu musí být kladné číslo, máme řešení původní logaritmické rovnice $x = 5$.

Příklad 4 Součet čitatele a jmenovatele neznámého zlomku je 49. Poměr zlomku ke zlomku převrácenému je $9 : 16$. Určete tento neznámý zlomek.
(12 bodů)

Řešení: Zapíšeme-li podmínky, dostaneme rovnice:

$$a + b - 49, \ \frac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{a}} = \frac{9}{16}.$$

Řešením soustavy rovnic dostaneme hledané $a = 21$, $b = 28$.

Příklad 5 Určete definiční obor funkce určené předpisem $y = -2x + 1$ a určete předpis pro funkci k ní inverzní. Načrtněte grafy obou funkcí. U obou rozhodněte, zda se jedná o funkci rostoucí nebo klesající.
(14 bodů)

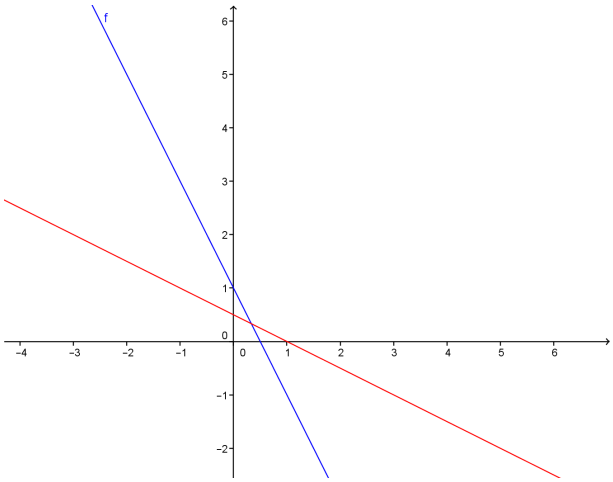
Řešení: Definiční obor uvedené lineární funkce jsou všechny reálná čísla. Funkce inverzní bude

$$x = -2y + 1,$$

což po úpravě

$$y = \frac{1 - x}{2}.$$

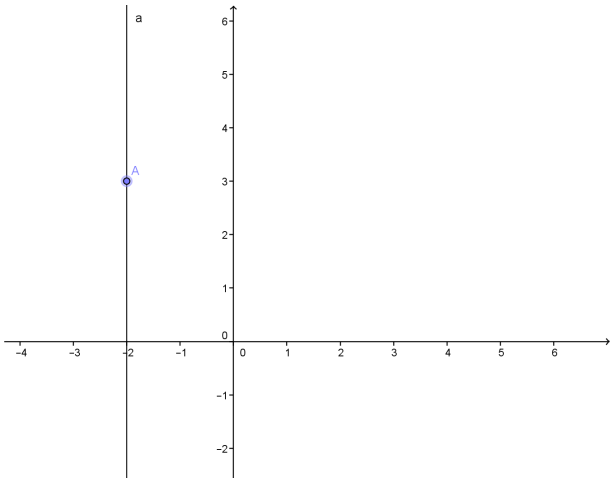
Protože koeficient u absolutního členu je záporný, v obou případech bude funkce klesající.



Příklad 6 Napište rovnici přímky v rovině, která je rovnoběžná s osou y a prochází bodem o souřadnicích $A = [-2, 3]$.
(10 bodů)

Řešení: Fakt, že hledaná přímka je rovnoběžná s osou y znamená, že směrový vektor bude $\overline{u} = (0, 1)$, resp. normálový vektor bude $\overline{n} = (1, 0)$. Obecnou rovnici dostaneme využitím podmínky, že přímka má procházet bodem A :

$$x + 2 = 0.$$



Příklad 7 Pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny mají velikosti v poměru $5 : 12$, má přeponu dlouhou $26m$. Jak velké jsou odvěsny?
(16 bodů)

Řešení: Označíme-li odvěsy a, b a přeponu $c = 26$, dostaneme z podmínek rovnice $\frac{a}{b} = \frac{5}{12}$, a $a^2 + b^2 = 26^2$ (Pythagorova věta). Řešením soustavy těchto dvou rovnic vypočteme $a = 10$, $b = 24$. Odvěsny budou mít délky $a = 10m$ a $b = 24m$.

Příklad 8 V rovnici $2x^2 - 51x + c = 0$ je jeden kořen roven číslu -2. Určete druhý kořen a parametr c.
(12 bodů)

Řešení: Využijeme vztahů pro součet a součin kořenů kvadratické rovnice. Dostaneme

$$-2 + x_2 = \frac{51}{2}, \; -2 \cdot x_2 = \frac{c}{2}.$$

Z těchto rovnic snadno vyčíslíme hodnotu druhého kořene $x_2 = \frac{55}{2}$ i hodnotu parametru $c = -110$.