Přijímací řízení 2013/14
Přírodovědecká fakulta
Ostravská univerzita v Ostravě
Navazující magisterské studium

Příklad 1 Derivujte funkci

$$y = \frac{5 - \sin^2 x}{\mathrm{e}^x}.$$

Řešení: Jedná se o funkci složenou, ve tvaru

$$y = \frac{g(h(x))}{f(x)}, \quad \text{kde } f(x) = \mathrm{e}^x, g(x) = 5 - x^2, h(x) = \sin(x).$$

Derivujeme tedy jako podíl:

$$y' = \left(\frac{g(h(x))}{f(x)}\right)' = \frac{(g(h(x)))' f(x) - g(h(x)) f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x, \quad (g(h(x)))' = g'(h(x))h'(x) = -2\cos x \sin x.$$

Po dosazení:

$$y' = \left(\frac{g(h(x))}{f(x)}\right)' = \frac{-2\cos x \sin(x)\mathrm{e}^x - (5 - \sin^2 x)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}$$

Po úpravě

$$y' = \frac{-2\cos x \sin(x) - 5 + \sin^2 x}{\mathrm{e}^x} = \frac{-\sin 2x - 5 + \sin^2 x}{\mathrm{e}^x}$$

Příklad 2 Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Rozhodněte, zda se jedná o soustavu homogenní nebo nehomogenní. V případě homogenní soustavy určete dimenzi a bázi řešení této soustavy.

Řešení: Jedná se o homogenní soustavu, protože vektor pravých stran je nulový. Taková soustava má buď právě jedno řešení a je jím nulový vektor, nebo má nekonečně mnoho řešení, jenž tvoří vektorový podprostor $\mathbb{R}^4$.
Maticově tedy zapíšeme jako

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix}$$

Využijeme řádkové elementární transfromce a budeme upravovat tak, abychom dostali matici trojúhelníkovou, například horní. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

což znamená, že soustava má nekonečně mnoho řešení, $(2t, -u, -5(t+u), 7(t+u))^T$. Dimenze prostoru řešení je rovna 2 a báze je například $\beta = \{(0, -1, -5, 7)^T, (2, 0, -5, 7)^T\}$.

Příklad 3 Najděte řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = \frac{\ln x}{y^2}$$

pro $y(\mathrm{e}) = 3$.

Řešení: Jedná se o obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu se separovanými proměnnými s počáteční podmínkou $y(\mathrm{e}) = 3$. Nejdříve hledáme obecné řešení:

$$y' = \frac{\ln x}{y^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\ln x}{y^2}$$

$$y^2 \mathrm{d}y = \ln x \mathrm{d}x$$

$$\int y^2 \mathrm{d}y = \int \ln x \mathrm{d}x$$

$$\frac{y^3}{3} = x \ln x - x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Řešení v explicitním tvaru:

$$y = \sqrt[3]{3x \ln x - 3x + D}, \quad D \in \mathbb{R}$$

Dosazením podmínky $y(\mathrm{e}) = 3$:

$$3 = \sqrt[3]{3\mathrm{e} \ln \mathrm{e} - 3\mathrm{e} + D},$$

odkud dostaneme, že $D = 27$. Tedy partikulární řešení má tvar

$$y = \sqrt[3]{3x \ln x - 3x + 27}.$$

Příklad 4 Napište, co je grupoid, pologrupa, monoid a grupa. Rozhodněte, jakou strukturu tvoří:

- $(\mathbb{N}_0, +)$, tj. množina přirozených čísel včetně nuly, kde operace $+$ je klasicky definované sčítání přirozených čísel,
- $(\mathbb{N}_0, -)$, tj. množina přirozených čísel včetně nuly, kde operace $-$ je klasicky definované odečítání přirozených čísel,
- $(\mathbb{Z}, +)$, tj. množina celých čísel, kde operace $+$ je sčítání celých čísel,
- $(\mathbb{Q}, \cdot)$, tj. množina racionálních čísel, kde $\cdot$ je násobení racionálních čísel,
- $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \cdot)$, tj. množina všech iracionálních čísel, kde $\cdot$ je násobení iracionálních čísel.

Řešení: Grupoid je základní algebraická struktura s jednou binární operací. Je to množina A, na které je definována jedna binární operace $\odot$. Množina A je vzhledem k operaci $\odot$ uzavřená. Značíme $(A, \odot)$
Pologrupa je grupoid, jehož operace splňuje vlastnost asociativity.
Monoid je pologrupa s neutrálním prvkem.
Grupa $(G, \odot)$ je monoid, ve kterém ke každému jeho prvku existuje v G prvek inverzní.

- $(\mathbb{N}_0, +)$, je monoid. Operace $+$ je uzavřená, asociativní, neutrálním prvkem je 0.
- $(\mathbb{N}_0, -)$, není grupoid – operace $-$ není uzavřená.
- $(\mathbb{Z}, +)$, je grupa.
- $(\mathbb{Q}, \cdot)$, je monoid. K prvku 0 neexistuje inverzní prvek.
- $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \cdot)$, není grupoid. Operace $\cdot$ není uzavřená ($\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).