Přijímací řízení 2013/14
Přírodovědecká fakulta
Ostravská univerzita v Ostravě
Navazující magisterské studium

Příklad 1 Derivujte funkci

$$y = \frac{x^2 - 1}{\cos^2 x}.$$

Řešení: Jedná se o funkci složenou, ve tvaru

$$y = \frac{f(x)}{g(h(x))}, \quad \text{kde } f(x) = x^2 - 1, g(x) = x^2, h(x) = \cos(x).$$

Derivujeme tedy jako podíl:

$$y' = \left(\frac{f(x)}{g(h(x))}\right)' = \frac{f'(x)g(h(x)) - f(x)(g(h(x)))'}{(g(h(x)))^2}$$

$$f'(x) = 2x, \quad (g(h(x)))' = g'(h(x))h'(x) = -2\cos x \sin x.$$

Po dosazení:

$$y' = \left(\frac{f(x)}{g(h(x))}\right)' = \frac{2x\cos^2 x + (x^2 - 1)2\cos x \sin x}{\cos^4 x}$$

Po úpravě

$$y' = \frac{2x\cos^2 x + (x^2 - 1)\sin 2x}{\cos^4 x}$$

Příklad 2 Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 &= 0 \\ 8x_1 - 12x_2 - 20x_3 - 27x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Rozhodněte, zda se jedná o soustavu homogenní nebo nehomogenní. V případě homogenní soustavy určete dimenzi a bázi řešení této soustavy.

Řešení: Jedná se o homogenní soustavu, protože vektor pravých stran je nulový. Taková soustava má buď právě jedno řešení a je jím nulový vektor, nebo má nekonečně mnoho řešení, jenž tvoří vektorový podprostor $\mathbb{R}^4$.
Maticově tedy zapíšeme jako

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 \\ 4 & -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -11 & -15 \\ 8 & -12 & -20 & -27 \end{pmatrix}$$

Využijeme řádkové elementární transfromce a budeme upravovat tak, abychom dostali matici trojúhelníkovou, například horní. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

což znamená, že soustava má nekonečně mnoho řešení, $(t/2, u/3, -11(t+u), 8(t+u))^T$. Dimenze prostoru řešení je rovna 2 a báze je například $\beta = \{(0, 1/3, -11, 8)^T, (1/2, 0, -11, 8)^T\}$.

Příklad 3 Najděte řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = \frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$$

pro $y(1) = 1$.

Řešení: Jedná se o obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu se separovanými proměnnými s počáteční podmínkou $y(1) = 1$. Nejdříve hledáme obecné řešení:

$$y' = \frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$$

$$\mathrm{e}^y \mathrm{d}y = x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$

$$\int \mathrm{e}^y \mathrm{d}y = \int x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{e}^y = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Řešení v explicitním tvaru:

$$y = \ln(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C), \quad C \in \mathbb{R}$$

Dosazením podmínky $y(1) = 1$:

$$1 = \ln(1\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^1 + C),$$

odkud dostaneme, že $C = \mathrm{e}$. Tedy partikulární řešení má tvar

$$y = \ln(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}).$$

Příklad 4 Rozhodněte, zda lze polynom $q(x) = 2x^2 - 3x + 1$ napsat jako lineární kombinaci polynomů $p_1(x) = 1+x+x^2$, $p_2(x) = 1-2x^2$, $p_3(x) = 1-x$ ve vektorovém prostoru polynomů nejvýše 2. stupně nad reálnými čísly. Pokud ano, určete koeficienty této lineární kombinace.

Řešení: Hledáme koeficienty $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$2x^2 - 3x + 1 = a(1 + x + x^2) + b(1 - 2x^2) + c(1 - x).$$

Po úpravě

$$2x^2 - 3x + 1 = (a + b + c) + (a - c)x + (a - 2b)x^2.$$

Tedy řešíme soustavu 3 rovnic o 3 neynámých (nehomogenní)

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1 \\ a - c &= -3 \\ a - 2b &= 2, \end{aligned}$$

jejíž řešení je $a = -2/5, b = -6/5, c = 13/5$.
Tedy polynom $q(x)$ lze zapsat jako lineární kombinaci polynomů $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$, a to

$$q(x) = -\frac{2}{5}p_1(x) - \frac{6}{5}p_2(x) + \frac{13}{5}p_3(x).$$