Přijímací řízení 2013/14
Přírodovědecká fakulta
Ostravská univerzita v Ostravě
Bakalářské studium

**Příklad 1** *Stanovte definiční obor výrazu a pak výraz upravte.*

$$\left(\frac{x^2}{4y^2-x^2}+1\right)\div\left(1-\frac{x}{x-2y}\right).$$

**Rešení:** Definiční obor výrazu bude $x, y \in \mathbb{R}$, kde $y \neq 0$ a zároveň $x \neq \pm 2y$. Při úpravě nejdříve výrazy v obou závorkách převedeme na společné jmenovatele a poté využijeme binomického vzorce $(a-b)(a+b)$, tedy

$$\left(\frac{x^2}{4y^2-x^2}+1\right)\div\left(1-\frac{x}{x-2y}\right)=\frac{x^2+4y^2-x^2}{4y^2-x^2}\div\left(\frac{-2y}{x-2y}\right)=\frac{4y^2}{(2y-x)(2y+x)}\div\left(\frac{-2y}{x-2y}\right)=$$

nyní můžeme druhý zlomek převrátit a za předpokladu, že $y \neq 0$ a $x \neq \pm 2y$ můžeme zkrátit, tedy

$$=\frac{4y^2}{(2y-x)(2y+x)}\cdot\left(\frac{-x+2y}{2y}\right)=\frac{2y}{2y+x}.$$

**Příklad 2** *Vypočtěte reálná čísla $x$, která vyhovují nerovnici s absolutní hodnotou*

$$\frac{|3-5x|}{x-2}>6.$$

**Rešení:** Nejdříve určíme nulové body, v našem případě $3-5x=0 \Rightarrow x=\frac{3}{5}$ a tedy budeme nerovnici řešit samostatně na dvou intervalech

$$\left(-\infty,\frac{3}{5}\right],\ \left(\frac{3}{5},\infty\right).$$

V prvním intervalu odstraněním absolutní hodnoty dostaneme
$\frac{3-5x}{x-2}>6$
$\frac{3-5x}{x-2}-\frac{6x-12}{x-2}>0$
$\frac{15-11x}{x-2}>0$
$x\in\left(\frac{15}{11},2\right).$
Na prvním intervalu tedy je řešením množina prázdná.
Na druhém intervalu pak dostaneme po odstranění absolutní hodnoty
$\frac{5x-3}{x-2}>6$
$\frac{5x-3}{x-2}-\frac{6x-12}{x-2}>0$
$\frac{-x+9}{x-2}>0$
$x\in(2,9).$
takže řešením na druhém intervalu jsou všechna $x\in(2,9)$.
Řešením nerovnice jsou všechna reálná čísla $x\in(2,9)$.

**Příklad 3** *Vypočtěte délku kružnice, která je o 9.8 cm delší, než obvod jí vepsaného pravidelného šestiúhelníku. Počítejte s $\pi=3.14$.*

**Rešení:** Pravidelný šestiúhelník vepsaný do kružnice můžeme rozdělit na šest rovnostranných trojúhelníků, kde délka strany tohoto trojúhelníku je rovna poloměru dané kružnice. Označme tedy tuto stranu $r$. Označíme-li obvod šestiúhelníku jako $o_1$ a obvod kružnice jako $o_2$, můžeme ze zadání odvodit následující rovnici

$$o_1+9,8=o_2$$

a po dosazení vztahů pro výpočet obvodů kružnice a šestiúhelníku dostáváme

$$6r+9,8=2\pi r,$$

a po dosazení $\pi=3.14$ a úpravě dává

$$9,8=6,28r-6r$$

tedy $r=35$ a obvod kružnice $o=2\pi r=219,8$ cm.

**Příklad 4** *Řešte exponenciální rovnici*

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{x} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}.$$

**Rešení:** V rovnici upravíme všechny základy na stejný základ $\frac{2}{3}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3(x-1)} = \frac{2}{3}$$

tedy po úpravě

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{(-3x+3)} = \frac{2}{3}.$$

Tedy

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{(2x-3x+3)} = \frac{2}{3}.$$

Z rovnosti základů plyne rovnost exponentů, tudíž $2x - 3x + 3 = 1 \Rightarrow x = 2$. Řešením rovnice je $x = 2$.

**Příklad 5** *Rozdělte úhel $2\pi$ na dva úhly tak, aby součet jejich kosínů byl roven $-1$.*

**Rešení:** Zapíšeme-li informace ze zadání matematickými vztahy, dostáváme:

$$\alpha + \beta = 2\pi$$

a

$$\cos\alpha + cos\beta = -1.$$

Vyjádřením $\alpha = 2\pi - \beta$ a dosazením do druhé rovnice, dostáváme

$$\cos(2\pi - \beta) + cos\beta = -1.$$

Nyní využijeme goniometrického vzorce $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ a dostáváme

$$\cos 2\pi \cos\beta + \sin 2\pi \sin\beta + \cos\beta = -1.$$

Uvědomíme-li si, že $\cos 2\pi = 1$ a $\sin 2\pi = 0$, můžeme danou rovnici upravit

$$2\cos\beta = -1$$

a tedy $\beta_1 = \frac{2\pi}{3}$ nebo $\beta_2 = \frac{4\pi}{3}$. Dopočítáním odpovídajících úhlů $\alpha$, dostáváme $\alpha_1 = \frac{4\pi}{3}$ nebo $\alpha_2 = \frac{2\pi}{3}$. Úhel $2\pi$ rozdělíme na dva úhly o velikostech $\frac{2\pi}{3}$ a $\frac{4\pi}{3}$.

**Příklad 6** *Napište rovnici přímky procházející počátkem a kolmé k přímce určené body $A = [-2, 1]$, $B = [4, -5]$.*

**Rešení:** Na určení parametrické rovnice přímky potřebujeme znát bod a směrový vektor, pro obecnou rovnici pak bod a normálový vektor. Jelikož je hledaná přímka kolmá k přímce určené body $A = [-2, 1]$, $B = [4, -5]$, pak směrový vektor $\vec{AB} = B - A = (6, -6)$ bude normálovým vektorem hledané přímky. Její obecná rovnice bude $ax + by + c = 0$ kde $(a, b)$ je normálový vektor, tj. $6x - 6x + c = 0$. Hodnotu $c$ dopočteme dosazením souřadnic bodu $O = [0, 0]$, kterým tato přímka prochází:

$$6 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0.$$

Rovnice přímky bude $x - y = 0$.

**Příklad 7** *Určete definiční obor funkce $y = 2x - 5$ a určete funkci k ní inverzní. Načrtněte grafy obou funkcí.*

**Rešení:** Definiční obor jsou všechna reálná čísla. Inverzní funkci dostaneme jako $x = 2y - 5$ což po úpravě bude

$$y = \frac{x+5}{2}.$$