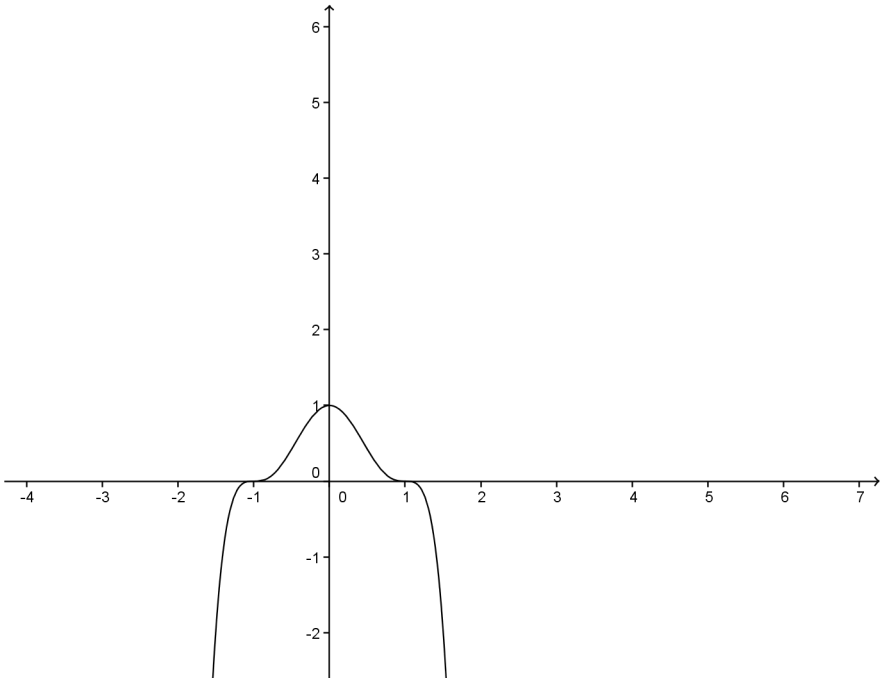
Přijímací řízení 2012/13
Přírodovědecká fakulta
Ostravská univerzita v Ostravě

Příklad 1 *Vyšetřete průběh funkce v jejím maximálním definičním oboru.*

$$f(x) = (1 - x^2)^3$$

Rešení: Definiční obor funkce jsou reálná čísla $\mathbb{R}$. Funkce je sudá protože $f(x) = f(-x)$.
První derivace funkce je $f'(x) = 3(1-x^2)^2 \cdot (-2x) = -6x(1-x^2)^2$ a protože je definovaná pro všechna $x \in \mathbb{R}$ pak tam, kde je nulová, mohou nastat extrémy, tj. $f'(x) = -6x(1-x^2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 1$.
Pro $x > 0$ je $f'(x) < 0$ a tedy funkce je klesající a pro $x < 0$ je $f'(x) > 0$ a tedy funkce je rostoucí. Extrém, konkrétně lokální i globální maximum je v bodě $x = 0$.
Druhá derivace bude $f''(x) = -6(1-x^2)^2 - 12x(1-x^2) \cdot (-2x) = (1-x^2)(25x^2 - 6)$. Z druhé derivace tedy dostaneme inflexní body, jsou to body, kde $f''(x) = 0$ tj. $x = \pm 1$ nebo $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{5}$. Na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-\frac{\sqrt{6}}{5}, \frac{\sqrt{6}}{5})$, a $(1, \infty)$ bude funkce konkávní a na intervalech $(-1, -\frac{\sqrt{6}}{5})$ a $(\frac{\sqrt{6}}{5}, 1)$ bude konvexní.



5cm

Příklad 2 *Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic*

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 - 14x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Rozhodněte, zda se jedná o soustavu homogenní nebo nehomogenní. V případě homogenní soustavy určete dimenzi a bázi řešení této soustavy.

Rešení: Jedná se o soustavu homogenní, neboť vektor pravých stran je nulový. Taková soustava má buď právě jedno řešení a je ním nulový vektor, nebo má nekonečně mnoho řešení, jenž tvoří vektorový podprostor $\mathbb{R}^3$.
Maticově tedy zapíšeme jako

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -14 \end{pmatrix}$$

Využijeme řádkové elementární transfromce a budeme upravovat tak, abychom dostali matici trojúhelníkovou, například horní. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{-16}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

což znamená, že soustava má nekonečně mnoho řešení, $(13t, 16t, 11t)^T$. Dimenze prostoru řešení je jedna a báze je například $\beta = \{(13, 16, 11)^T\}$.

Příklad 3 *Spočítejte obsah plochy, která leží mezi parabolami $y^2 = 2px$ a $x^2 = 2py$.*

Rešení: Obě křivky se protínají v bodech $x = 0$ a $x = 2p$ tedy obsah spočteme pomocí integálu jako

$$S = \int_0^{2p} \sqrt{2px}dx - \int_0^{2p} \frac{x^2}{2p}dx = \sqrt{2p}\int_0^{2p} x^{\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{2p}\int_0^{2p} x^2 dx =$$

$$= \sqrt{2p}\Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^{2p} - \frac{1}{2p}\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^{2p} = \frac{4}{3}p^2.$$

Příklad 4 *Rozhodněte, zda jsou vektory $\vec{u_1} = (1, -1, 5)$, $\vec{u_2} = (2, 4, 8)$, $\vec{u_3} = (3, 9, 21)$ reálného aritmeického třídimenzionálního vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ lineárně závislé nebo lineárně nezávislé. Určete lineární obal těchto vektorů a jeho dimenzi i bázi.*

Rešení: Lineární závislost můžeme určit pomocí hodnosti příslušné matice, vytvořené z vektorů (tvoří řádky), tj.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 21 \end{pmatrix}$$

což po úpravě použitím řádkových elementárních transformací dává

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

tedy vektory jsou lineárně nezávislé. Lineární obal těchto vektorů je celý prostor $\mathbb{R}^3$ a dimenze je tedy 3.