Správné řešení písemné zkoušky z matematiky- varianta A
Přijímací řízení do NMgr. studia **učitelských oborů** 2010

Příklad 1.
Vyšetřete průběh funkce v jejím maximálním definičním oboru a načrtněte její graf

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Určete paritu (sudá/lichá), periodická /neperiodická, průsečíky s osami, obor hodnot, intervaly monotónnosti, intervaly na kterých je konvexní /konkávní, inflexní body a asymptoty.

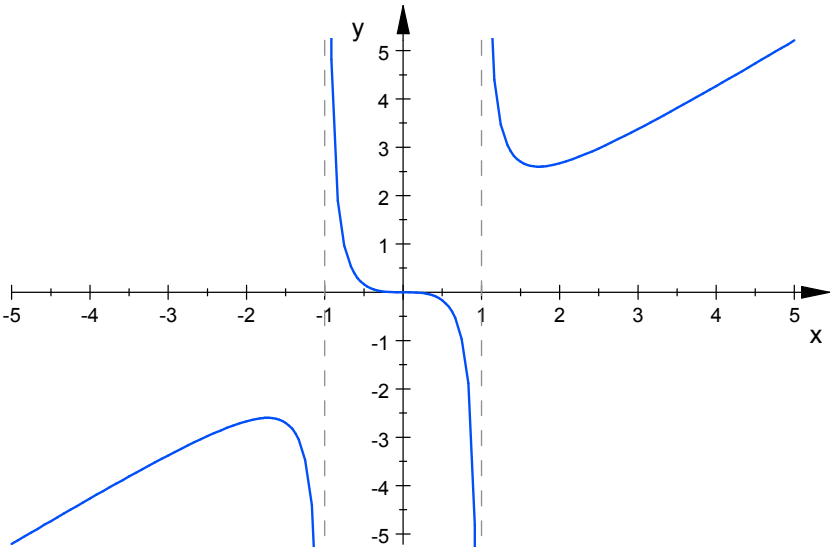
Řešení:
Definiční obor- vyloučíme nulu ve jmenovateli, tj. $D(f) = R - \{\pm 1\}$, funkce je spojitá v každém bodě definičního oboru.

Funkce není periodická, není sudá, ale je lichá, protože $f(-x) = -f(x)$. To také znamená, že nám stačí vyšetřit průběh funkce pouze v „polovině“ definičního oboru, tj. na $[0,1) \cup (1,\infty)$.

Extrémy- použijeme derivaci funkce.
$y' = \dfrac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$. Body podezřelé z extrému jsou tam, kde $y' = 0$ nebo kde neexistuje. Řešením rovnice $y' = 0$ dostaneme $x_0 = -\sqrt{3}, x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}$. Určením znaménka pak dostaneme, že funkce je na
$(0,1)$ klesající.
$(1,\sqrt{3})$ klesající.
a na $(\sqrt{3},\infty)$ rostoucí.
V bodě $x_2 = \sqrt{3}$ je tedy ostré lokální minimum.

Konvexnost a konkávnost určíme z druhé derivace. Po úpravě dostaneme
$y'' = \dfrac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3}$. Řešením rovnice $f''(x) = 0$ dostaneme $x = 0$, zbylé dva kořeny jsou komplexní (neleží v R).
Jelikož
$y''(0.5) < 0$ je funkce na $(0,1)$ konkávní, a $y''(2) > 0$ tedy na $(1,\infty)$ je konvexní.

Asymptoty:
Přímka $x = 1$ je svislá asymptota, asymptota pro $x \to \infty$ je $y = x$.
Graf funkce je



Příklad 2.

Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + \ \ 3x_3 &= 0 \\ x_1 - 4x_2 - 13x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 5x_2 + \ \ 4x_3 &= 0 \end{aligned} .$$

Určete dimenzi vektorového prostoru řešení a alespoň jednu jeho bázi.

Řešení:

Jedná se o soustavu lineárních algebraických rovnic homogenních. Elementárními řádkovými transformacemi můžeme upravit na

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -13 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -10 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tedy podprostor řešení má dimenzi 1, zvolíme parametr $x_3 = t$, pak dostaneme $x_2 = -5t$ a $x_1 = 7t$, tedy řešení je lineární obal $\left\langle (-7,-5,1)^T \right\rangle$.

Příklad 3.

Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y = x^2 - 2x$ a $y = x$.

Řešení:

Nalezneme průsečíky paraboly s osou x a obsah plochy rozdělíme na dílčí části. U obsahu určíme znaménko s ohleme na to, zda je „příslušná část“ nad a nebo pod osou x.

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \int_0^2 x\,dx - \int_0^2 \left(x^2 - 2x\right)dx + \int_2^3 \left(x - \left(x^2 - 2x\right)\right)dx$$

Po úpravě a vypočtení integrálů dostaneme

$$S = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 - \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_0^2 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_2^3 = \frac{9}{2}.$$

Příklad 4.

Rozhodněte, zda struktura $(Z_4,+,\cdot)$ zbytkových tříd modulo 4 spolu s operací sčítání a násobení modulo 4 tvoří okruh, obor integrity nebo těleso.

Zbytkové třídy modulo 4 jsou definovány jako rozklad množiny celých čísel podle kongruence $a \equiv b \quad mod\, 4 \Leftrightarrow 4 \mid (a-b)$.

Řešení:

Množina Z_4 obsahuje 4 zbytkové třídy modulo 4, označme je $Z_4 = \{0,1,2,3\}$. Spolu s operací sčítání modulo 4 tvoří komutativní grupu, viz. tabulka (uzavřenost na operaci, komutativita, neutrální prvek je třída 0, inverze).

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Ale pozor, s operací násobení modulo 4 netvoří grupu, neboť například prvek 2 nemá inverzi.

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Třída 2 je zároveň tzv. dělitelem nuly, protože $2 \neq 0$, ale $2 \cdot 2 = 0$. Struktura tvoří pouze okruh.

Příklad 1: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = e^{\frac{1}{x}}(x+2)$.

Řešení:

Je D(f) = $-\{0\}$ a $f(x)$ je spojitá v D(f). Snadno se též zjistí, že $f(x)$ není ani sudá ani lichá.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}}(x+2) = -\infty$ (je totiž $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+2) = -\infty$);

obdobně $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}(x+2) = \infty$. Dále $\lim\limits_{x\to0-} e^{\frac{1}{x}}(x+2) = 0$, protože $\lim\limits_{x\to0-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to0-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ a

$\lim\limits_{x\to0+} e^{\frac{1}{x}}(x+2) = \infty$, protože $\lim\limits_{x\to0+} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim\limits_{x\to0+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$.

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}}.\left(\frac{-1}{x^2}\right)(x+2) + e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}.\left(1-\frac{x+2}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}.\ \frac{x^2-x-2}{x^2} \text{ pro } x \neq 0.$$

Vzhledem k tomu, že $e^{\frac{1}{x}}.\frac{1}{x^2} > 0$ pro všechna $x \in$ D(f), „rozhoduje“ o znaménku $f'(x)$ výraz $x^2 - x - 2$. Především je $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$, tj. pro $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

V intervalu $(-\infty, -1)$ je $f'(x) > 0$, tj. $f(x)$ je v $(-\infty, -1\rangle$ rostoucí.

V intervalu $(-1, 0)$ je $f'(x) < 0$, tj. $f(x)$ je v $\langle -1, 0)$ klesající.

V intervalu $(0, 2)$ je $f'(x) < 0$, tj. $f(x)$ je v $(0, 2\rangle$ klesající.

V intervalu $(2, \infty)$ je $f'(x) > 0$, tj. $f(x)$ je v $\langle 2, \infty)$ rostoucí.

V bodě $x = -1$ nastává lokální maximum s hodnotou $f(-1) = \frac{1}{e}$.

V bodě $x = 2$ nastává lokální minimum s hodnotou $f(2) = 4\sqrt{e}$.

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}}.\left(\frac{-1}{x^2}\right).\frac{x^2-x-2}{x^2} + e^{\frac{1}{x}}.\frac{(2x-1).x^2-2x\left(x^2-x-2\right)}{x^4} =$$

$$= e^{\frac{1}{x}}.\frac{1}{x^4}\left(2+x-x^2-x^2+2x^2+4x\right) = e^{\frac{1}{x}}.\frac{1}{x^4}(2+5x) \text{ pro } x \neq 0.$$

Je $f''(x) = 0$ pro $x = -\frac{2}{5}$ a o znaménku $f''(x)$ „rozhoduje“ činitel $5x + 2$. V intervalu $(-\infty, -\frac{2}{5})$ je $f''(x) < 0$, tj. funkce $f(x)$ je v $(-\infty, -\frac{2}{5}\rangle$ konkávní. V intervalech $(-\frac{2}{5}, 0)$ i $(0, \infty)$ je $f''(x) > 0$, takže funkce $f(x)$ je v $\langle -\frac{2}{5}, 0)$ a $(0, \infty)$ konvexní.

Bod $I = [-\frac{2}{5}, f(-\frac{2}{5})]$ je inflexním bodem grafu funkce $f(x)$. Průsečíkem grafu funkce $f(x)$ s osou x je bod $[-2, 0]$. Nalezněme teď asymptoty: pro $x \to \infty$ hledáme přímku o rovnici $y = kx + q$, čísla k, q najdeme ze vztahů $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $q = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx)$.

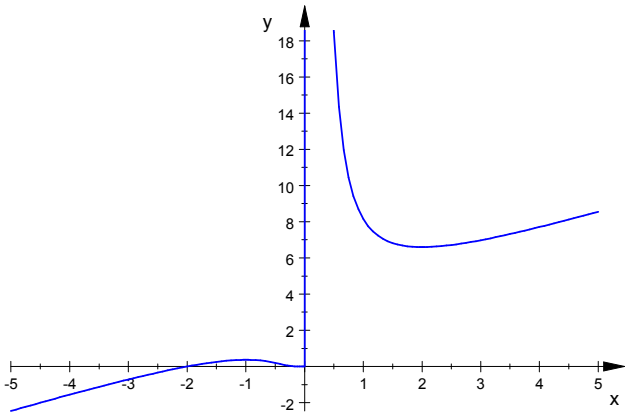
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}.(x+2)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}.\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{x} = 1.1 = 1, \text{ tj. } k = 1.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}.(x+2) - x\right) = \lim_{x\to\infty} x.\left[e^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{2}{x}\right)-1\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{2}{x}\right)-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{z}(1+2z)-1}{z} =$$

$= \lim\limits_{z\to 0+} \dfrac{e^{z}(1+2z)+e^{z}.2}{1} = 3 = q$; při tomto výpočtu jsme převedli neurčitý výraz „$\infty \,.\, 0$“ na „$\frac{0}{0}$“, užili jsme substituci $\frac{1}{x} = z$ a nakonec i L' Hospitalovo pravidlo. Je tedy rovnice asymptoty grafu funkce $f(x)$ pro $x \to \infty$ $y = x + 3$. Obdobnými úvahami se lze přesvědčit o tom, že stejnou rovnici má asymptota i pro $x \to -\infty$.

Vypočteme druhou souřadnici inflexního bodu: $f(-\frac{2}{5}) = \frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}} \approx 0{,}13$. K upřesnění grafu v levém okolí bodu 0 vypočteme $\lim\limits_{x\to 0-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}}.\dfrac{x^2-x-2}{x^2}$. Jde o limitu typu „$\infty \,.\, 0$“, protože $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{z\to-\infty} e^{z} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0-} (x^2 - x - 2) = -2$, $\lim\limits_{x\to 0-} x^2 = 0+$, tj. $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{x^2-x-2}{x^2} = -\infty$. Pišme proto $\lim\limits_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}}.\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right) = \lim\limits_{t\to-\infty} e^{t}\left(1-t-2t^2\right) =$

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{\left(1-t-2t^2\right)}{\frac{1}{e^t}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{\left(1-t-2t^2\right)}{e^{-t}}$$, což je limita typu „$\frac{\infty}{\infty}$“. Dvojím užitím L' Hospitalova pravidla máme $\lim_{t\to-\infty}\frac{\left(1-t-2t^2\right)}{e^{-t}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{-1-4t}{-e^{-t}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{-4}{e^{-t}}=0$, tj. $\lim_{x\to0-}f'(x)=0$.



Příklad 2.

Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned}3x_1-5x_2+2x_3+4x_4&=2\\7x_1-4x_2+x_3+3x_4&=5\\5x_1+7x_2-4x_3-6x_4&=3\end{aligned}\quad.$$

Řešení:

Zapíšeme matici soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c}3&-5&2&4&2\\7&-4&1&3&5\\5&7&-4&-6&3\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c}3&-5&2&4&2\\0&-23&11&19&-1\\0&-46&22&38&1\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c}3&-5&2&4&2\\0&-23&11&19&-1\\0&0&0&0&1\end{array}\right)$$

tedy soustava nemá řešení.

Příklad 3.

Vypočtěte objem tělesa, které je vytvořeno rotací vnitřku elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ kolem osy x.

Řešení:

Vyjádříme $y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$, a objem určíme pomocí integrálu:

$$V=\pi\frac{b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx=\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

Příklad 4.

Rozhodněte, zda struktura $(Z_6,+,\cdot)$ zbytkových tříd modulo 6 spolu s operací sčítání a násobení modulo 6 tvoří okruh, obor integrity nebo těleso.
Zbytkové třídy modulo 6 jsou definovány jako rozklad množiny celých čísel podle kongruence $a \equiv b \quad mod\, 6 \Leftrightarrow 6 \mid (a-b)$.
Řešení:
Množina Z_6 obsahuje 6 zbytkové třídy modulo 6, označme je $Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$. Spolu s operací sčítání modulo 6 tvoří komutativní grupu, viz. tabulka (uzavřenost na operaci, komutativita, neutrální prvek je třída 0, inverze).

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Ale pozor, s operací násobení modulo 6 netvoří grupu, neboť například prvek 2 nemá inverzi.

*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Třída 2 je zároveň tzv. dělitelem nuly, protože $2 \neq 0$, ale $2 \cdot 3 = 0$. Struktura tvoří pouze okruh.