Příklad 1.

Vyšetřete průběh funkce $y = \frac{e^x}{x}$ v jejím maximálním definičním oboru a načrtněte její graf.

Řešení:

Definiční obor $x \neq 0$ tedy $D(f) = R = \{0\}$. Funkce není ani sudá, ani lichá.

Průsečíky s osama nejsou.

Extrémy- použijeme derivaci funkce.

$y' = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$. Body podezřelé z extrému jsou tam, kde $y' = 0$ nebo kde neexistuje. Řešením rovnice $y' = 0$ dostaneme $x = 1$. Neboť

$y'(-1) < 0$ bude funkce na $(-\infty, 0)$ klesající.

$y'(0.5) < 0$ bude funkce na $(0,1)$ klesající.

$y'(2) > 0$ bude funkce na $(1, \infty)$ rostoucí.

V bodě $x = 1$ je tedy minimum. V bodě $x = 0$ není funkce definovaná.

Konvexnost a konkávnost určíme z druhé derivace. Platí

$y'' = \frac{e^x(x^3 - 2x^2 + 2x)}{x^4}$. Řešením kubické rovnice $x^3 - 2x^2 + 2x = 0$ dostaneme $x = 0$, zbylé dva kořeny jsou komplexní (neleží v R).

Jelikož

$y''(-1) < 0$ je funkce na $(-\infty, 0)$ konkávní, a $y''(1) > 0$ tedy na $(0, \infty)$ je konvexní.

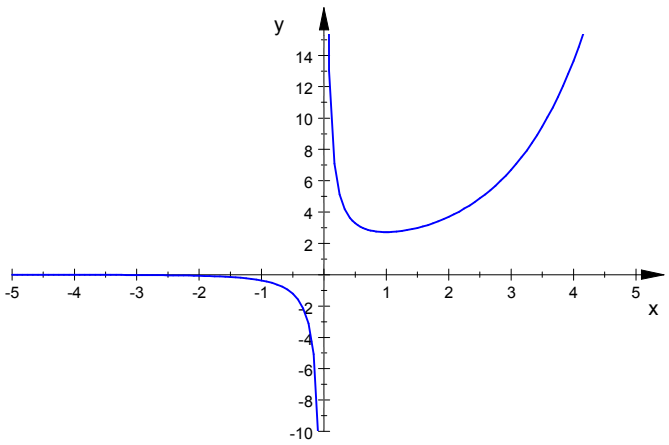
Asymptoty:

Asymptota bez směrnice je $x = 0$. Se směrnicí pak dostaneme (použitím L´Hospitalova pravidla)

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{\frac{e^x}{x}}{x} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{e^x}{2} \right), \text{ tedy } k = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{2} \right) = \infty \text{ a } k = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^x}{2} \right) = 0.$$

Dále

$q = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 0 \cdot x \right) = 0$ a tedy směrnice pro $x \to -\infty$ je $y = 0$. Graf funkce je



Příklad 2:
Řešte v R^3 soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 - 4x_2 - 13x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 10x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Jakou strukturu má množina řešení?

Řešení:
Jedná se o soustavu lineárních nehomogenních rovnic, s maticí soustavy, která je singulární, tedy existuje nekonečně mnoho řešení.
Matice soustavy:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -13 & 0 \\ 2 & -2 & -10 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -16 & -1 \\ 0 & -6 & -16 & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -16 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

, což představuje soustavu po úpravě

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -6x_2 - 16x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Každé řešení lze zapsat jako součet partikulárního řešení nehomogenní soustavy a řešení příslušné homogenní soustavy.

Řešení příslušné homogenní soustavy je $\left\langle \left(\frac{7}{3}, -\frac{8}{3}, 1\right)^T \right\rangle$, partikulární řešení nehomogenní soustavy je například $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, 0\right)^T$. Tedy každé řešení lze zapsat ve tvaru

$$\overline{x} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, 0\right)^T + t \cdot \left(\frac{7}{3}, -\frac{8}{3}, 1\right)^T, t \in R$$

Příklad 3.
Popište, v čem spočívá důkaz matematickou indukcí a poté dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3} n(2n+1)(2n-1).$$

Řešení:
Důkaz matematickou indukcí lze použít pro důkaz vlastnosti všech prvků induktivní množiny, např. přirozených čísel. Pokud uvažujeme množinu přirozených čísel N, pak důkaz spočívá v tom, že $\forall M \subseteq N$ takovou, že

I. $1 \in M$
II. $k \in M \Rightarrow k+1 \in M$

platí $M = N$.
V našem případě v prvním kroku ukážeme, že daný součet platí pro 1, ve druhém kroku, že za předpokladu, že platí pro k platí také pro $k+1$. Tím ukážeme, že daný součet platí pro všechny přirozené čísla.
I.

$$1^2 = \frac{1}{3}1(2\cdot 1+1)(2\cdot 1-1)$$
$$1 = 1$$

ano, platí

II. Nechť platí $1^2+3^2+5^2+...+(2k-1)^2 = \frac{1}{3}k(2k+1)(2k-1)$. Potom musíme ukázat, že také

$$1^2+3^2+5^2+...+(2k-1)^2+(2(k+1)-1)^2 = \frac{1}{3}(k+1)(2(k+1)+1)(2(k+1)-1).$$

Dosadíme z první rovnosti a upravujeme:

$$\frac{1}{3}k(2k+1)(2k-1)+(2(k+1)-1)^2 = \frac{1}{3}(k+1)(2(k+1)+1)(2(k+1)-1)$$
$$\frac{1}{3}k(2k+1)(2k-1)+(2k+1)^2 = \frac{1}{3}(k+1)(2k+3)(2k+1)$$
$$\frac{1}{3}k(2k-1)+(2k+1) = \frac{1}{3}(k+1)(2k+3)$$

protože člen $2k+1 \neq 0$ a tak můžeme krátit. Dále upravíme

$$\frac{2}{3}k^2-\frac{1}{3}k+2k+1 = \frac{2}{3}k^2+\frac{2}{3}k+1+k$$
$$\frac{2}{3}k^2+\frac{5}{3}k+1 = \frac{2}{3}k^2+\frac{5}{3}k+1$$

což platí. Z důkazu matematickou indukcí plyne, že daný součet platí pro každé přirozené číslo.

Příklad 4.

Uveďte po jednom příkladu funkce $f: R \to R$, která

a) je bijektivní
b) je injektivní a není bijektivní
c) je surjektivní a není injektivní
d) není injektivní ani surjektivní.

Řešení:

a) Má li být reálná funkce $f: R \to R$, jedné reálné proměnné (přiřazuje tedy každému $x \in R$ právě jedno $y = f(x) \in R$) bijektivní, znamená to, že každým dvěma různým $x_1, x_2 \in R$ jsou přiřazeny různé funkční hodnoty $f(x_1) \neq f(x_2)$ a zároveň každé $y \in R$ má svůj jediný vzor $f^{-1}(y) = x \in R$.
Konkrétně např. identita $y = x$, přímé úměrnosti $y = k \cdot x$, nekonstantní lineární funkce $y = a \cdot x + b$, nebo mocninné funkce s lichým mocnitelem $y = x^n, n = 3,5,...$ nebo k nim inverzní odmocninové funkce s lichým odmocnitelem $y = \sqrt[n]{x}, n = 3,5,....$

b) Má li být reálná funkce $f: R \to R$ jedné reálné proměnné injektivní, znamená to, že každým dvěma různým $x_1, x_2 \in R$ jsou přiřazeny různé funkční hodnoty

$f(x_1) \neq f(x_2)$. Pokud však navíc nemá být bijektivní, znamená to že né každé $y \in R$ musí mít svůj vzor. Konkrétně např. exponenciální funkce $y = \exp(ax), a \in R$ jsou injektivní, ale nabývají pouze kladných hodnot, tedy nula ani žádné záporné číslo nemají svůj vzor při zobrazení exponenciální funkcí $y = \exp(ax)$.

c) Má li být reálná funkce $f : R \to R$ surjektivní, znamená to, že každé $y \in R$ má nějakou neprázdnou množinu vzorů a pokud nemá být injektivní, znamená to, že není splněno, že každým dvěma různým $x_1, x_2 \in R$ jsou přiřazeny různé funkční hodnoty $f(x_1) \neq f(x_2)$. Konkrétně např. funkce $y = x(x-1)(x-2)$ nabývá nulové hodnoty pro tři různé hodnoty $x = 0,1,2$, přitom její obor hodnot je celé R. Jiným příkladem je např. funkce $y = tg(x)$, která sice není definovaná na celém R (až na liché násobky $\pi/2$), ale její funkční hodnoty vyplní celé R. Jelikož je periodická není injektivní a každé $y \in R$ má nekonečně mnoho vzorů.

d) Funkce, které nejsou ani injektivní ani surjektivní, např. všechny kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$, funkce absolutní hodnota $y = |x|$, nebo goniometrické funkce $y = \sin x$, $y = \cos x$.