Katedra matematiky Přírodovědecké fakulty Ostravské univerzity v Ostravě

Písemná zkouška z matematiky- varianta A
Přijímací řízení do NMgr. studia **AM, AME** 2009

Řešení:

Příklad 1
Vyšetřete průběh funkce v jejím maximálním definičním oboru a načrtněte její graf

$$y = x \cdot \ln x^2$$

Řešení:
Definiční obor: $D(f) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.
Obor hodnot: $H(f) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.
Funkce je lichá.
Průsečíky s osou x: $x = \pm 1$.
Průsečíky s osou y: žádné.
Funkce je spojitá na celém svém definičním oboru, protože je součinem spojitých funkcí, přičemž funkce $y = \ln x^2$ je složená funkce dvou spojitých funkcí). Funkce není spojitá v 0, kde není definovaná, ovšem tento bod je bodem odstranitelné nespojitosti.
Stacionární body: $x = \pm 1/e$.
Intervaly monotónnosti: roste na intervalu $(-\infty;-1/e) \cup (1/e;+\infty)$, klesá na intervalu $(-1/e;1/e)$.
Lokální extrémy: v bodě $x = -1/e$ je ostré lokální maximum $+2/e$, v bodě $x = +1/e$ je ostré lokální minimimum $-2/e$.
Konvexnost, konkávnost, inflexní body: na int. $(-\infty;0)$ je konkávní, na int. $(0;+\infty)$ je konvexní, inflexním bodem je 0, která nepatří do definič. oboru.
Asymptoty: nemá svislé asymptoty ani asymptoty se směrnicí.

Příklad 2
Řešte soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Určete dimenzi vektorového prostoru řešení a alespoň jednu jeho bázi.

Řešení:

Matice soustavy $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ je ekvivalentní matici $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, jejíž hodnost je rovna 3. Obecné řešení soustavy je $x_1 = x_4$, $x_2 = x_3 = -x_4$, $x_4 = t$, kde t je reálný parametr. Řešení tvoří vektorový prostor dimenze 1 (přímka procházející počátkem), jehož bázi tvoří např. vektor $(1,-1,-1,1)$ (směrový vektor té přímky).

Příklad 3

Vypočtěte objem vnitřku rotačního tělesa ohraničeného plochou $z = \ln(x^2 + y^2)$ a rovinami $z = 0$ a $z = e^2$.

Řešení:

Těleso má dolní podstavu kružnici poloměru $r_1 = 1$ a horní podstavu kružnici poloměru $r_2 = e^{e^2/2}$, projekcí tělesa do roviny ρ_{xy} je tedy mezikruží $\Omega : 1 \le r \le e^{e^2/2}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Objem plného válce o poloměru horní podstavy $r_2 = e^{e^2/2}$ a výšce $v = e^2$ je $V_1 = \pi \cdot e^2 \cdot e^{e^2}$.

Objem doplňku tělesa do tohoto válce je $V_2 = \int_\Omega \ln(x^2 + y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} (\int_{r_1}^{r_2} \ln r^2 \cdot r \cdot dr) \cdot d\varphi$,

následná substituce $r^2 = s$, $2rdr = ds$, transformace mezí $r_1 = 1$K $s_1 = 1$, $r_2 = e^{e^2/2}$K $s_2 = e^{e^2}$, $V_2 = \pi \cdot (e^2 \cdot e^{e^2} - e^{e^2} + 1)$.

Objem vnitřku rotačního tělesa je

$V = V_1 - V_2 = \pi \cdot e^2 \cdot e^{e^2} - \pi \cdot e^2 \cdot e^{e^2} + \pi \cdot e^{e^2} - \pi = \pi(e^{e^2} - 1)$.

Výpočet je možné též provést pomocí jednorozměrného integrálu.

Příklad 4

Nalezněte obecné řešení obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

$$y' = 2x \cdot y + 2x^3.$$

Řešení:

Jedná se o lineární diferenciální rovnici 1. řádu nehomogenní.

Nejdříve řešíme příslušnou rovnici homogenní $y' = 2x \cdot y$, separací proměnných a následnou integrací obdržíme řešení homogenní ve tvaru $y_H = C\exp(x^2)$. Variací konstanty C předpokládáme partikulární řešení ve tvaru $y_P = C(x)\exp(x^2)$, kde variovaná konstanta $C(x) = \int 2x^3 \exp(-x^2)dx = -x^2 \exp(-x^2) - \exp(-x^2)$, tedy $y_P = -x^2 - 1$. Celkové řešení pak je $y(x) = y_H + y_P = C\exp(x^2) - x^2 - 1$.